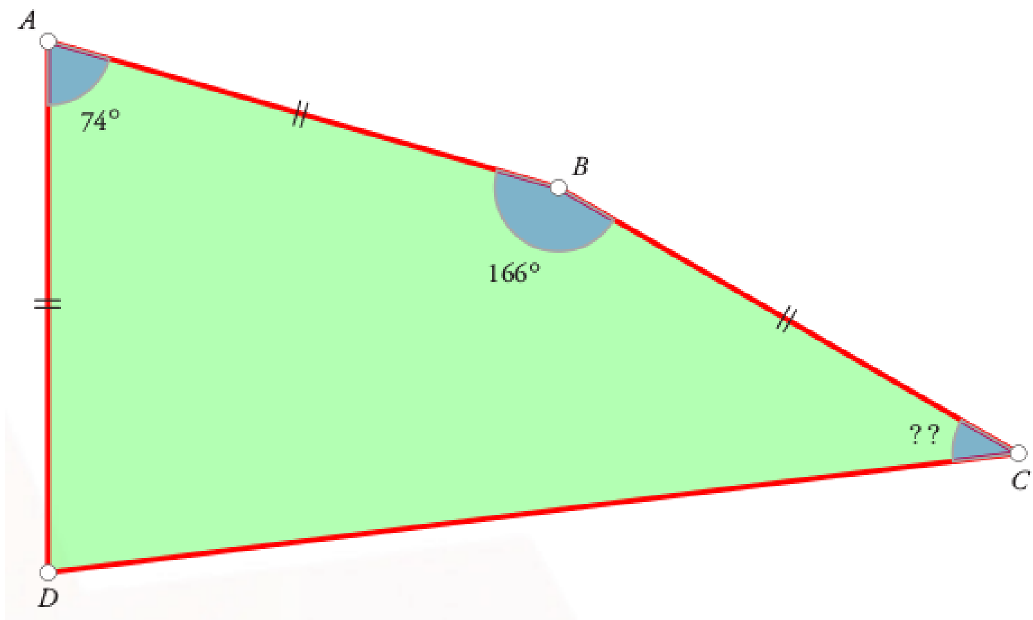
<u>ಚತುರ್ಭುಜ ಸಮಸ್ಯೆಗೊಂದು ದೃಷ್ಟಿಕೋನ !</u>

೧. ಚಿತ್ರ ೧ ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ABCD ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದ್ದು, DA = AB = BC ಇದೆ ಮತ್ತು $\measuredangle DAB=74°$, $\measuredangle ABC=166°$ ಇವೆ. ಸಮಸ್ಯೆಯೇನೆಂದರೆ $\measuredangle BCD$ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.



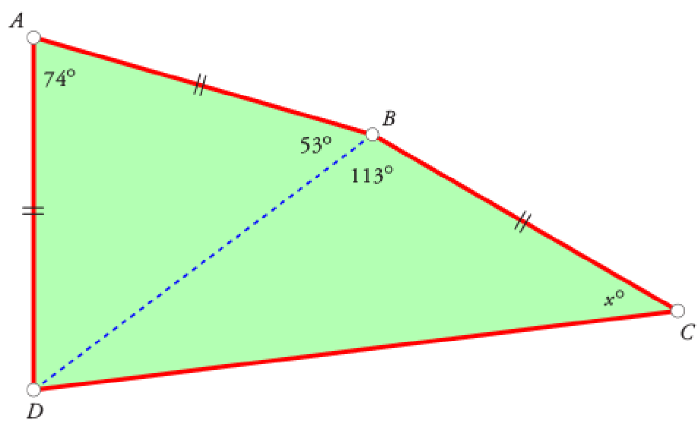
ಚಿತ್ರ ೧

ಈ ಸಮಸ್ಯೆ (ಚಿತ್ರ ೧ ರಿಂದ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ) ಸವಾಲಿನದಾಗಿದೆ ಆದರೆ ಅನೇಕ ವಿಭಿನ್ನ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಒಪ್ಪಿಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ, ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಬಹಳ ಸೊಗಸಾದವು (ಇದು ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ತುಂಬಾ ಆಸಕ್ತಿದಾಯಕಗೊಳಿಸುತ್ತದೆ).

ನಾವು ಇಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಪ್ರಸ್ತುತಪಡಿಸುತ್ತೇವೆ.

ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯನ್ನು ಬಳಸಿ ಪರಿಹಾರ.

AD = AB ಹಾಗು $\measuredangle ABD=53°$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, . AB = a ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿ. ಸಮದ್ವಿಬಾಹು △ ABD (ಚಿತ್ರ ೨) ರಿಂದ ನಮಗೆ DB = 2a sin 37 ∘ ಎಂದು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. (ಇದು ಹೇಗೆಂದು ತಿಳಿಯಲು, A ಇಂದ BD ಯ ತಳದವರೆಗೆ ಲಂಬವೊಂದನ್ನು ಎಳೆದಂತೆ ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ)



ಚಿತ್ರ ೨

ಮುಂದೆ, $\triangle$ BCD ಅಲ್ಲಿ ಸೈನ್ ಪದ್ಧತಿಯಂತೆ ಹಾಗು ಪೂರಕ ಕೋನಗಳು ಸಮನಾದ ಸೈನ್‌ಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದರಿಂದ ನಮಗೆ :

$$\frac{DB}{\sin x^\circ} = \frac{BC}{\sin(x+113^\circ)} ,$$

$$\therefore \frac{2a\sin 37^\circ}{\sin x} = \frac{a}{\sin(x+113^\circ)} .$$

ಇದರಿಂದ ನಮಗೆ : $2 \sin 37^\circ \cdot \sin (x^\circ + 113^\circ) = \sin x^\circ$, ಸಿಗುತ್ತದೆ ಆದ್ದರಿಂದ

$$2 \sin (67^\circ - x^\circ) = \frac{\sin x^\circ}{\sin 37^\circ} .$$

ನಾವು ಈಗ 0° ರಿಂದ 90° ವರೆಗಿನ ಮಧ್ಯಂತರದಲ್ಲಿ ಸೈನ್ ಫಲನಕಾರ್ಯದ ಏಕೈಕ ಸ್ವಭಾವವನ್ನು ಆಧರಿಸಿ ಒಂದು ಬುದ್ಧಿವಂತ ವಾದವನ್ನು ಆಶ್ರಯಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಪ್ರಾರಂಭಿಸಲು, ಗಮನಿಸಬೇಕಾದ ಅಂಶವೇನೆಂದರೆ, ನಮ್ಮ ಬಳಿ $0 < x < 67$ ಇದೆ. (ಇಲ್ಲದಿದ್ದಲ್ಲಿ ಸಮತೆಯ ಎರೆಡೂ ಬದಿಯಲ್ಲಿರುವ ಅಂಶಗಳು ವಿರುದ್ಧ ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತಿದ್ದವು)

ಇವಾಗ $x < 37$ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಿ. ಆಗ ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಶವು 1 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ.

ಅದೇ ರೀತಿ $x < 37$ ಯು ಇದಕ್ಕೆ ಎಡೆ ಮಾಡಿಕೊಡುತ್ತದೆ : $67 - x > 30$, ಆದ್ದರಿಂದ

$\sin (67^\circ - x^\circ) > \sin 30^\circ$,

$\therefore 2 \sin (67^\circ - x^\circ) > 2 \sin 30^\circ$,

$\therefore 2 \sin (67^\circ - x^\circ) > 1$.

$x < 37$ ಆದರೆ, ಎಡಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಶವು 1 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿದೆ, ಅದೇ ರೀತಿ ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಶವು 1 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಿದೆ. ನಾವು ವೈರುಧ್ಯಕ್ಕೆ ಬಂದಿದ್ದೇವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $x < 37$ ಆಗಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಇದೇ ಊಹೆಯಂತೆ $x > 37$ ಆದರೆ; ಎಡಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಶವು 1 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಿದೆ, ಅದೇ ರೀತಿ ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಶವು 1 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಈ ಸಾಧ್ಯತೆಯೂ ಕೆಲಸ ಮಾಡುವುದಿಲ್ಲ. X ರ ಮೌಲ್ಯ 37 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯೂ ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚೂ ಇರಲಾರದು, ಇದರಿಂದ ತಿಳಿಯುವುದೇನೆಂದರೆ $x = 37$. ಆದ್ದರಿಂದ $\measuredangle BCD = 37^\circ$.

ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಮತ್ತು ರೇಖಾಗಣಿತಗಳಿಂದ ಸಂಯೋಜಿಸುವ ಒಂದು ಸುಂದರ ಪರಿಹಾರ.

ಇಲ್ಲಿ ಸೊಗಸಾದ ಮತ್ತು ಆಹ್ಲಾದಕರ ಪರಿಹಾರವೊಂದು ರೇಖಾಗಣಿತ ಮತ್ತು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಗಳಿಂದ ಸಂಯೋಜಿಸುತ್ತದೆ ಮತ್ತು $\sin \theta = \sin (180^\circ - \theta)$ ಎಂಬ ಸರ್ವಸಮತ್ವದ ಪರಿಣಾಮಕಾರಿ ಬಳಕೆ ಮಾಡುತ್ತದೆ.

AC , BD ಎಂಬ ಎರೆಡು ವಿಕರ್ಣಗಳು ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು E ಎಂಬಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ (ಚಿತ್ರ ೩). ಕೋನದ ಲೆಕ್ಕಮಾಡಿದಾಗ $\measuredangle DEC = 120^\circ$ ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

$\triangle$ ADC ಹಾಗು $\triangle$ BDC ಗಳಿಗೆ ಸೈನ್ ನಿಯಮವನ್ನು ಹಾಕಿದಾಗ :

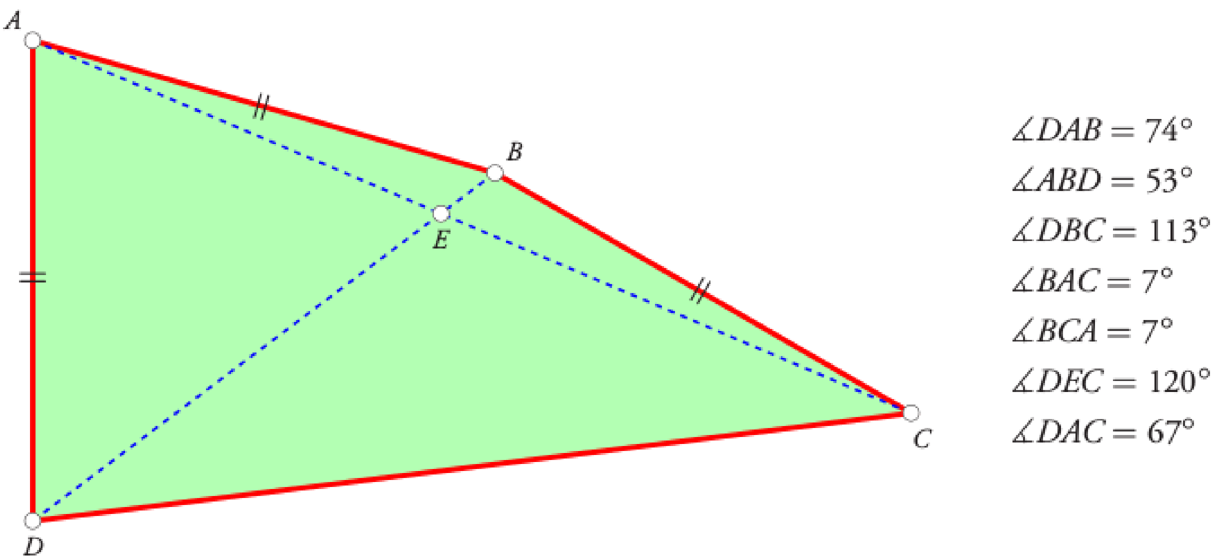
$$\frac{AD}{\sin\measuredangle ACD} = \frac{CD}{\sin 67\circ}$$

$$\frac{BC}{\sin\measuredangle BDC} = \frac{CD}{\sin 113\circ}$$

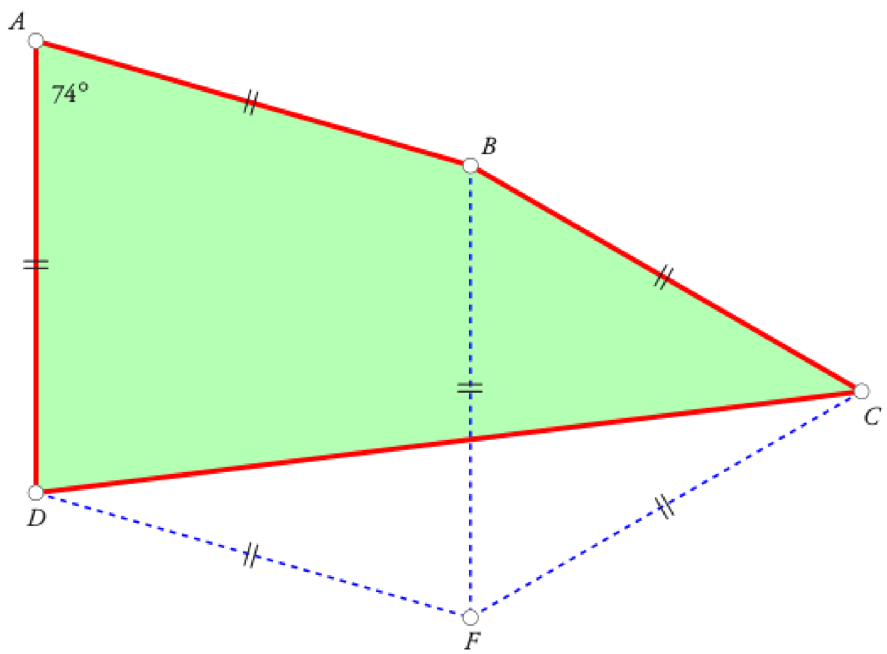
sin 67 ∘ = sin 113 ∘ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಮೇಲಿನ ಎರೆಡೂ ಸಮತೆಗಳ ಬಲಭಾಗಗಳು ಸಮವಾಗಿವೆ. ನಮ್ಮ ಬಳಿ AD = BC ಇದೆ. ಇದರಿಂದ $\sin\measuredangle ACD=\sin\measuredangle BDC$

$\therefore \quad \measuredangle ACD=\measuredangle BDC$, ಎರೆಡೂ ತೀವ್ರ ಕೋನಗಳಾದ್ದರಿಂದ ($\measuredangle ACD+\measuredangle BDC=60\circ$)

$\therefore \quad \measuredangle ECD=30\circ$ ಹಾಗು $\measuredangle BCD=37\circ$.



ಚಿತ್ರ ೩



ಚಿತ್ರ ೪

ಸೊಗಸಾದ ಶುದ್ಧ ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಪರಿಹಾರ

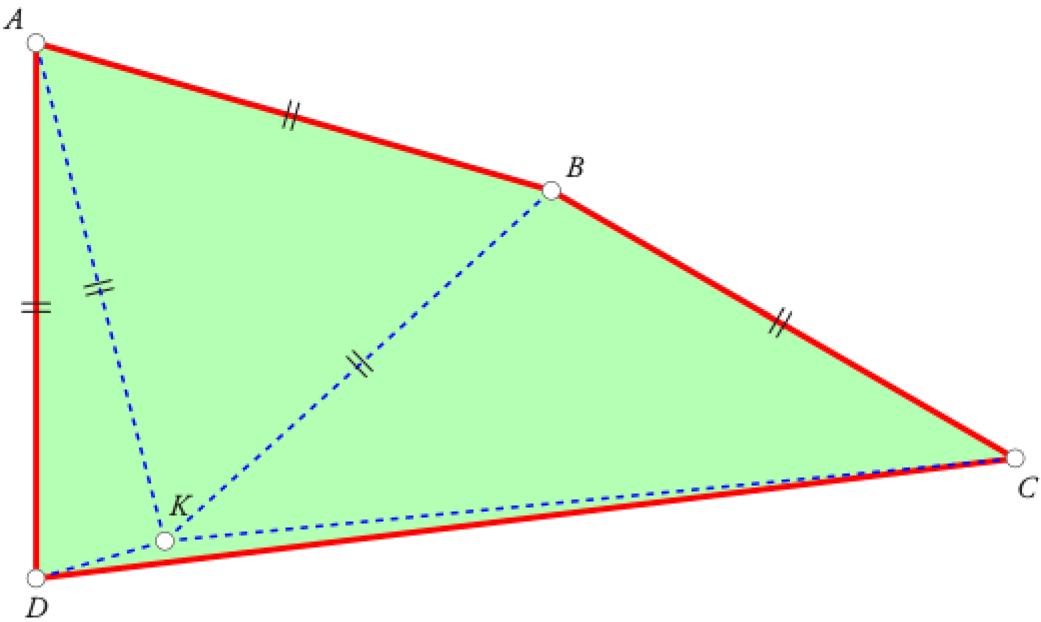
ಮುಂದೆ, ನಾವು ಅತ್ಯಂತ ಸುಂದರ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಪ್ರಸ್ತುತಪಡಿಸುತ್ತೇವೆ, ಇದು ಮೂಲಭೂತ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಕಲ್ಪನೆಗಳ ಮೂಲಕ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಬಗ್ಗೆ ಚಿತ್ರಿಸುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ ೪). $\overline{BF} = \overline{AD}$ ಬಿಡಿಸಿರಿ; ನಂತರ ABFD ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ, ಹಾಗು AB = AD ಇರುವುದರಿಂದ, ಇದೊಂದು ವಜ್ರಾಕೃತಿ (ತೋರಿಸಿದಂತೆ).

ಇದರಿಂದ ನಮಗೆ $\measuredangle ABF = 106^\circ$ ಹಾಗು $\measuredangle FBC = 60^\circ$. BF = BC ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, BFC ಸಮಾಂತರ ತ್ರಿಭುಜವಾಗುತ್ತದೆ, ಆದ್ದರಿಂದ $\measuredangle BCF = 60^\circ$

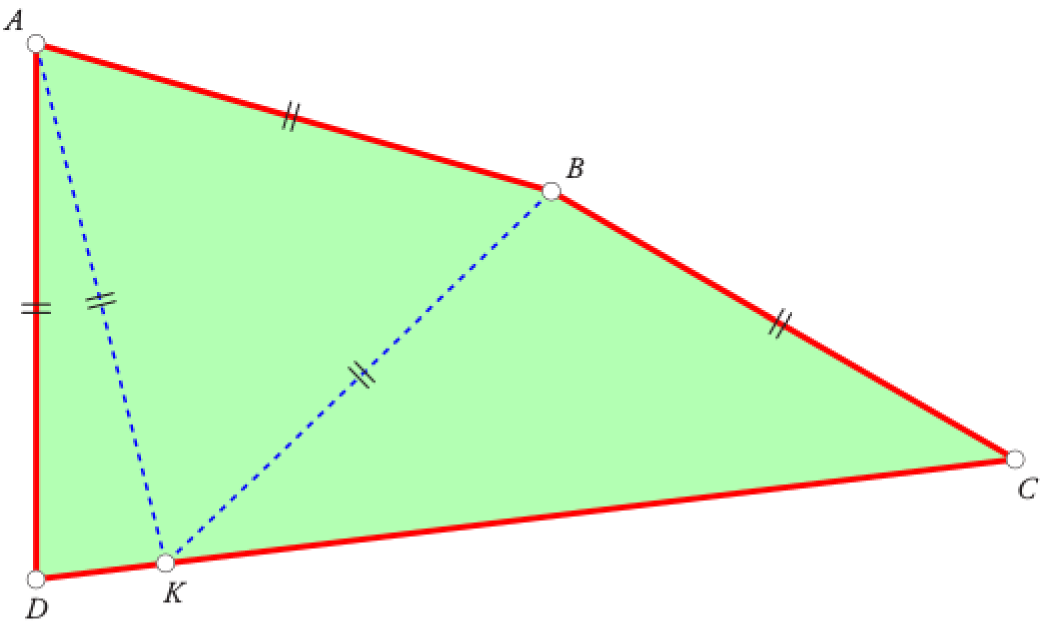
ಮತ್ತೆ ಸಮದ್ವಿಬಾಹು △ FCD ಅಲ್ಲಿ, $\measuredangle CFD = 74^\circ + 60^\circ = 134^\circ$ ಆಗುತ್ತದೆ,

ಆದ್ದರಿಂದ $\measuredangle FCD = 23^\circ$

ಹೀಗೆ ಮುಂದುವರಿದು $\measuredangle BCD = 60^\circ - 23^\circ = 37^\circ$.



ಚಿತ್ರ ೫



ಚಿತ್ರ ೬

ಮತ್ತೊಂದು ಸೊಗಸಾದ ಶುದ್ಧ ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಪರಿಹಾರ

ನಾವು ಮತ್ತೊಂದು ಅತ್ಯಂತ ಸುಂದರ ಶುದ್ಧ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಪ್ರಸ್ತುತಪಡಿಸುತ್ತಾ ಇದನ್ನು ಮುಗಿಸುತ್ತೇವೆ.

$\triangle$ AKB ಸಮಾಂತರ ತ್ರಿಭುಜವಾಗುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬಿಂದು K ಅನ್ನು ಗುರುತು ಮಾಡಿ (ಚಿತ್ರ ೫). ಈಗಾಗಲೆ ನಮಗೆ AK = AD ಹಾಗು BK = BC ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

ಹಾಗು $\measuredangle KAB = \measuredangle KBA = 60^\circ$ ಇರುವುದರಿಂದ ನಮಗೆ $\measuredangle KAD = 14^\circ; \measuredangle KBC = 106^\circ$ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

ಮುಂದುವರಿದು ನಮಗೆ $\measuredangle AKD = 83^\circ; \measuredangle BKC = 37^\circ$ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ. ಅದೇ ರೀತಿ $\measuredangle AKB = 60^\circ$ ಇದೆ.

ಇವಾಗ $83^\circ + 60^\circ + 37^\circ = 180^\circ$ ಎಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿಡಿ. ಇದರರ್ಥ D , K , C ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿವೆ !

ಆದ್ದರಿಂದ ತೋರಿಸಿದ ಚಿತ್ರವು ನಿಖರವಾದುದಲ್ಲ (ಅದನ್ನು ಬೇಕಂತಲೇ ಹಾಗೆ ತೋರಿಲಾಗಿತ್ತು; ಗಮನಿಸಬೇಕಾದ ಅಂಶವೆಂದರೆ ನಾವು K ಅನ್ನು ಚತುರ್ಭುಜದ ಒಳಗೆ ಗುರುತಿಸಿದ್ದೇವೆ ಆದರೆ ಅದನ್ನು ಚತುರ್ಭುಜದ ಹೊರಗೂ ಗುರುತಿಸಬಹುದಿತ್ತು); ಸರಿಯಾದ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಚಿತ್ರ ೬ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಮೇಲಿನಿಂದ ತಿಳಿಯುದೇನೆಂದರೆ $\measuredangle BCK = 37^\circ$, i.e., $\measuredangle BCD = 37^\circ$.

ಟಿಪ್ಪಣಿ. ಇವು ಶುದ್ಧ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಪರಿಹಾರಗಳು ಎಂಬುದು ಗಮನಾರ್ಹವಾಗಿದೆ (ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಪರಿಹಾರಗಳು) ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದ ಬಳಕೆಯನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದ್ದವು. ಈ ವಿಷಯವಸ್ತು ಇಂತಹ ಸಮಸ್ಯೆಗಳ ಎಲ್ಲಾ ಪರಿಹಾರಗಳಲ್ಲೂ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಬರುತ್ತದೆ.

ಉಲ್ಲೇಖಗಳು

Mathematics Stack Exchange, “Is there a way to solve for the missing angle?”