ಪ್ರಧಾನ ಲೇಖನಗಳು

ವಿಶೇಷ ಲೇಖನಗಳು
ಚುಕ್ಕಿಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವಿಕೆ...
ಅಂತರ್ವೇಕ್ಷಣ ಮತ್ತು ಬಹಿರ್ವೇಕ್ಷಣದ ಕಲೆ ಮತ್ತು ವಿಜ್ಞಾನ

ಕೊಮ್ಯಾಕೊ.
ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಈ ಮುಂದೆ ಕಾಣಿಸಿರುವ ಸನ್ನಿವೇಶವು ಸರ್ವೇಸಾಮಾನ್ಯವಾದುದು : ಎರಡು ಚಲ ಪರಿಮಾಣಗಳಾದ x ಮತ್ತು y ಗಳನ್ನು ಫಲನವೊಂದರ ಮೂಲಕ ಪರಸ್ಪರ ಹೊಂದಿಸಲಾಗಿರುತ್ತದೆ; $y = f(x)$; ಆದರೆ *f ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿಲ್ಲ. ಅದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ನಮ್ಮ ಹೊಣೆ. ನಮಗೆ ಲಭ್ಯವಿರುವ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳೆಂದರೆ* x *ಗೆ ಕೆಲವು ಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನು ನೀಡಿ, ಅದಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿತವಾದ* y *ನ ಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಕೆಲವು ಪ್ರಯೋಗಗಳನ್ನು ಕೈಗೊಳ್ಳುವುದು. ಹಾಗೆ ಪ್ರಯೋಗಗಳನ್ನು ಕೈಗೊಂಡಾಗ ,* x *ಮತ್ತು* y *ಗಳಿಗೆ ಕೆಳಕಂಡಂತೆ* n *ಸಂಖ್ಯೆಯಷ್ಟು ಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.*

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots\ldots\ldots\ldots (x_n, y_n)$

ಈ ಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನೆಲ್ಲ ಒಂದು ಗ್ರಾಫ್ ಹಾಳೆಯ ಮೇಲೆ ದಾಖಲಿಸಿದರೆ ಹೀಗೆ ಕಾಣಬಹುದು:

ಚಿತ್ರ 1

ಕೇವಲ ಇಷ್ಟೇ ದತ್ತಾಂಶ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಇಟ್ಟುಕೊಂಡು ನಾವು ಅಪರಿಚಿತವಾದ *f* ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು (ನಿಷ್ಕರ್ಷಿಸುವುದು) ಸಾಧ್ಯವೆ? ಇದೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಹೀಗೂ ಕೇಳಬಹುದು: ದತ್ತಾಂಶ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ದಾಖಲಿಸಿ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾದ ಮತ್ತು ಅನನ್ಯವಾದ ವಕ್ರರೇಖೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿಸುವುದು (ಎಳೆಯುವುದು) ಸಾಧ್ಯವೆ? ಆ ವಕ್ರರೇಖೆಯು ಎಲ್ಲ ಬಿಂದುಗಳನ್ನೂ ಹಾದುಹೋಗಬೇಕು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ . (ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು 'ಅತ್ಯುತ್ತಮವಾಗಿ ಹೊಂದುವ ರೇಖೆ' ಅಥವಾ 'ಅತ್ಯುತ್ತಮವಾಗಿ ಹೊಂದುವ ವಕ್ರರೇಖೆ' ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲೆಂದು ಮಂಡಿಸಿರುವ ಸಮಸ್ಯೆ ಅಲ್ಲ).
ಒಂದು ಕ್ಷಣದ ಆಲೋಚನೆಯಲ್ಲಿಯೇ 'ಹೀಗೆ ಎಳೆಯುವುದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ' ಎಂಬ ಉತ್ತರ ದೊರಕಿಬಿಡುತ್ತದೆ. ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಈಗ ಮಂಡಿಸಿರುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮಂಡಿಸಿದಾಗ ಅದರ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯು ಬಹಳ ವಿಸ್ತಾರವಾದುದರಿಂದ ಅದಕ್ಕೊಂದು ಉತ್ತರವನ್ನು ನೀಡುವುದು ಕಷ್ಟಸಾಧ್ಯ. ನಮಗೆ ಕೇವಲ ಬಹುಪದಿ (polynomial) ಫಲನ *f* ನಲ್ಲಿ ಆಸಕ್ತಿ ಇದ್ದರೂ ಸಹ (ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಈ ಸಂದರ್ಭವೇ ಹೆಚ್ಚು), ದತ್ತಾಂಶ ಮಾಹಿತಿಯ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾದ, ಅನನ್ಯವಾದ ಉತ್ತರವನ್ನು ಕೊಡುವುದು ಆಗಲೂ ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದಿಲ್ಲ; ಏಕೆಂದರೆ ದತ್ತ ಮಾಹಿತಿಗೆ ಹೊಂದಿಕೊಳ್ಳುವಂತಹ ಇನ್ನೂ ಅಸಂಖ್ಯಾತ ಬಹುಪದಿಗಳಿವೆ.
ಅತಿ ಸರಳವಾದ ಸಮಸ್ಯೆಯೊಂದಿಗೆ ಆರಂಭಿಸೋಣ: ಕೇವಲ ಎರಡೇ ದತ್ತಾಂಶ ಬಿಂದುಗಳು (n=2). ಈಗಿನ ಸ್ಥಿತಿಯು ಚಿತ್ರ 2 ರಲ್ಲಿ ಇರುವಂತೆ ಗೋಚರಿಸುತ್ತದೆ:

ಚಿತ್ರ 2

ಚಿತ್ರ 2 (b) ಸೂಚಿಸುವಂತೆ, A ಮತ್ತು B ಗಳ ಮಧ್ಯೆ ಅನೇಕ ವಿಭಿನ್ನ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು. ನಾವು ನಮ್ಮ ಈ ಪ್ರಯತ್ನದಲ್ಲಿ ಮುಂದುವರಿಯಬೇಕಾದರೆ ಕೆಲವು ಹೆಚ್ಚುವರಿ ನಿಬಂಧನೆಗಳನ್ನು ಹೇರಬೇಕು. ಎಲ್ಲಕ್ಕಿಂತ ಸುಸ್ಪಷ್ಟವಾದ ನಿಬಂಧನೆಯೆಂದರೆ: ಕನಿಷ್ಠ ಡಿಗ್ರಿಯಲ್ಲಿ ರೇಖೆಯನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕು . ಇದನ್ನೇ ಮತ್ತೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ

ಮಂಡಿಸುವುದಾದರೆ, ನಮ್ಮ ಶೋಧವು ಅತಿ ಕಡಿಮೆ ಡಿಗ್ರಿಯುಳ್ಳ , ಎಲ್ಲ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ, ಬಹುಪದಿ ವಕ್ರರೇಖೆಗಾಗಿ. ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಾದ A ಮತ್ತು B ಯ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ, ನಾವು ಶೋಧಿಸುವ ರೇಖೆಯು A ಮತ್ತು B ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಹಾದುಹೋಗುವಂತಹ ಸರಳರೇಖೆಯೇ ಆಗಿದೆ . ಇದನ್ನು ನೀವು ಚಿತ್ರ 2 (c) ಯಲ್ಲಿ ಕಾಣಬಹುದು. ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು $y = ax + b$ ಆಗಿದ್ದು, ಇದರಲ್ಲಿ ಎರಡು ತಿಳಿದಿರದ ಗುಣಾಂಕಗಳಾದ a ಮತ್ತು b ಗಳಿವೆ. ಇಲ್ಲಿ ದತ್ತ ಬಿಂದುಗಳು ಸಹ ಇರುವುದರಿಂದ, ಅವುಗಳು a ಮತ್ತು b ಗಳನ್ನು ಅನನ್ಯವಾಗಿ ಸ್ಥಿರಗೊಳಿಸಲು ಸಹಾಯಕವಾಗುತ್ತವೆ.

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ, A, B, C ಮತ್ತು D ಎಂಬ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ನೀಡಿರುವಾಗ , ಎಲ್ಲ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಹಾದುಹೋಗುವ ಕನಿಷ್ಠ ಡಿಗ್ರಿಯುಳ್ಳ ಬಹುಪದಿ ವಕ್ರರೇಖೆಯು ಘನರೂಪಿ ವಕ್ರರೇಖೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ . ಹೀಗೆಯೇ ಇನ್ನೂ ಹಲವನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

'ಕನಿಷ್ಠ' ಎಂಬ ಪದಕ್ಕೆ ನೀಡಿರುವ ಮಹತ್ವದ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ ಅಗತ್ಯವೆನಿಸುತ್ತದೆ . ಯಾವುದಾದರೂ ವಿದ್ಯಮಾನವನ್ನು ವಿವರಿಸಲು ಯತ್ನಿಸತೊಡಗಿದಾಗ ಅದಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಸಮರ್ಥವಾದ ಹಲವಾರು ಸ್ಪರ್ಧಾತ್ಮಕ ಪ್ರಮೇಯಗಳು ಲಭ್ಯವಾಗುವುದು ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಕಂಡುಬರುವ ಸಂಗತಿಯೇ . ಇಂತಹ ಪ್ರಮೇಯಗಳಲ್ಲಿ, ಮಿಕ್ಕೆಲ್ಲ ಅಂಶಗಳೂ ಸಮವೆನಿಸಿದಾಗ, ಆ ಪ್ರಮೇಯಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದರಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚು ಸರಳತೆ ಇರುವುದೋ ಅದನ್ನೇ ಆರಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದು ವಾಡಿಕೆ. ಲಭ್ಯವಾದ ಅತಿ ಸರಳ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಆರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ . ಇಲ್ಲಿ 'ಸರಳ' ಎಂದರೆ ಅತಿ ಕಡಿಮೆ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಪ್ರಮೇಯ ಎಂದು ಅರ್ಥೈಸಬಹುದು . ನಮ್ಮ ವಕ್ರರೇಖೆ ಶೋಧನಾ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಅದನ್ನು 'ಕನಿಷ್ಠ ಡಿಗ್ರಿ ಇರುವ ಬಹುಪದಿ ವಕ್ರರೇಖೆ' ಎಂದು ಅರ್ಥೈಸಬಹುದು . ಈ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಆಕ್ಕಮ್ಸ್ ರೇಜರ್ (Occam's razor) ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ ([1] ನೋಡಿರಿ). ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ತತ್ವಜ್ಞಾನದಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ಬಹು ಮುಖ್ಯ ಸಿದ್ಧಾಂತವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಟಿಪ್ಪಣಿ: 'ಅಂತರ್ವೇಷಣ' ಮತ್ತು 'ಬಹಿರ್ವೇಷಣ' ಪದಗಳ ಅರ್ಥವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ವಿಷದಪಡಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ . ನಮಗೆ n ದತ್ತಾಂಶ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ನೀಡಿದ್ದು , n ಡಿಗ್ರಿಯುಳ್ಳ ಮತ್ತು f ಬಹುಪದಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗುವಂತಹ ವಕ್ರರೇಖೆಯೊಂದನ್ನು ನಾವು ಎಳೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಈ ರೇಖೆಯು ಎಲ್ಲ n ದತ್ತ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಹಾದುಹೋಗಿದೆ ಎಂದು ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ. ಈಗ ನಾವು ದತ್ತ ಮಾಹಿತಿಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯೊಳಗೆ ಸ್ಥಾಪಿತವಾಗಿರುವಂತಹ x-ಮೌಲ್ಯವೊಂದಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾದ y-ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಅಂದಾಜಿಸಲು ದತ್ತ ಮಾಹಿತಿ ಮತ್ತು ಕಲ್ಪಿತ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳ ಅರಿವನ್ನು ಬಳಸಬಯಸುತ್ತೇವೆ. ಆಗ ನಾವು ಮಾಡಬೇಕಾದುದಿಷ್ಟೆ – ಫಲನ f ನಲ್ಲಿ x ನ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಹಾಕಿದರೆ ಸಾಕು; ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ಅಂದಾಜು ಮೌಲ್ಯ ದೊರಕಿಬಿಡುತ್ತದೆ. ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಅಂತರ್ವೇಷಣ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಆದರೆ x ನ ಮೌಲ್ಯವು ದತ್ತ ಮಾಹಿತಿಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯಿಂದ ಹೊರಗಿದ್ದರೆ ಏನಾಗುತ್ತದೆ? ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿಯೂ x ಮತ್ತು y ಗಳ ನಡುವಿನ ಫಲನ ಸಂಬಂಧವು ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗದೆ ಮುಂದುವರಿಯುತ್ತದೆಂದು ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಅಗತ್ಯವಾದ ಅಂದಾಜನ್ನು ಪಡೆಯಲು, ಮುಂಚಿನಂತೆಯೇ ಇಲ್ಲಿಯೂ ಫಲನ f ನಲ್ಲಿ x ನ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಹಾಕುತ್ತೇವೆ. ಈ ಕ್ರಮವನ್ನು ಬಹಿರ್ವೇಷಣ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. (ಇದನ್ನೇ ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ: ದತ್ತ ಮೌಲ್ಯಗಳ ಅಥವಾ ವಿಷಯಗಳ ಸರಣಿಯನ್ನು ನಿಶ್ಚಿತವಾಗಿ ತಿಳಿದಿರುವ ಕ್ಷೇತ್ರದ ಹೊರಗೆ ವಿಸ್ತರಿಸಿ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಅಂದಾಜಿಸುವ ಕ್ರಮವನ್ನು ಬಹಿರ್ವೇಷಣ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.)

ಸಂಖ್ಯಾ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ ಮತ್ತು ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಗಣಿತದ ಅನ್ವಯಕ್ಕೆ ಅಂತರ್ವೇಷಣ ಮತ್ತು ಬಹಿರ್ವೇಷಣಗಳು ಅತ್ಯಂತ ಪ್ರಮುಖವಾದ ಅಂಶಗಳಾಗಿವೆ. ಆಸಕ್ತ ಓದುಗರು ಅಂತರ್ವೇಷಣ ಮತ್ತು ಬಹಿರ್ವೇಷಣಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಹೆಚ್ಚಿನ ಮಾಹಿತಿಗಾಗಿ ಈ ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿರುವ ಜಾಲತಾಣ ಕೊಂಡಿಗಳು [2] ಮತ್ತು [3] ಕ್ರಮವಾಗಿ ಪರಿಶೀಲಿಸಬಹುದು.

[1] ವಿಕಿಪೀಡಿಯ, ಆಕ್ಕಮ್ಸ್ ರೇಜರ್, https://en.wikipedia.org/wiki/Occam%27s_razor

[2] ವಿಕಿಪೀಡಿಯ, ಅಂತರ್ವೇಷಣ, https://en.wikipedia.org/wiki/Interpolation

[3] ವಿಕಿಪೀಡಿಯ, ಬಹಿರ್ವೇಷಣ, https://en.wikipedia.org/wiki/Extrapolation

----

ದ ಕಮ್ಯುನಿಟಿ ಮ್ಯಾಥಮ್ಯಾಟಿಕ್ಸ್ ಸೆಂಟರ್ (ಕೊಮ್ಯಾಕೊ) ರಿಷಿ ವ್ಯಾಲಿ ಎಜುಕೇಷನ್ ಸೆಂಟರ್ (AP) ಮತ್ತು ಸಹ್ಯಾದ್ರಿ ಸ್ಕೂಲ್ (KFI)ಗಳ ಒಂದು ವಿಸ್ತರಣಾ ಅಂಗವಾಗಿದೆ. ಈ ಅಂಗಸಂಸ್ಥೆಯು ಗಣಿತ ಬೋಧನಾ ಕಾರ್ಯಾಗಾರಗಳನ್ನು ನಡೆಸುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ರಾಜ್ಯ ಸರ್ಕಾರಗಳ ಮತ್ತು ಸರ್ಕಾರೇತರ ಶಾಲೆಗಳ ಬೋಧನಾ ಸಾಮಗ್ರಿಗಳ ಸಿದ್ಧಪಡಿಸುವಿಕೆಯ ಕಾರ್ಯವನ್ನು ಕೈಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ . ಕೊಮ್ಯಾಕೊವನ್ನು ಈ ಕೊಂಡಿಯಲ್ಲಿ ಸಂಪರ್ಕಿಸಬಹುದು : shailesh.shirali@gmail.com.

Extrapolation is an estimation of a value based on extending a known sequence of values or facts beyond the area that is certainly known. … **Interpolation** is an estimation of a value within two known values in a sequence of values.