ಹಿರಿಯ ಶಾಲೆಗಾಗಿ ಲೆಕ್ಕಗಳು

ಲೆಕ್ಕಗಳ ಸಂಪಾದಕರು : ಪೃಥ್ವಿಜಿತ್ ಡೆ ಹಾಗು ಶೈಲೇಶ್ ಶಿರಾಲಿ

ಲೆಕ್ಕ VI-2-S.1

ಒಬ್ಬರು ಗಣಿತ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ $x^2 + 10x + 20$ ಅನ್ನು ಹಲಗೆಯ ಮೇಲೆ ಬರೆದರು . ಆಮೇಲೆ ಪ್ರತಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ನಿಯತಾಂಕ ಅಥವಾ ರೇಖೀಯ ಸಹಾಂಕಗಳನ್ನು 1 ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚು ಅಥವಾ ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿದರು. ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ $x^2 + 20x + 10$ ಬರುತ್ತದೆ. ಈ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಛಲಪರಿಮಾಣ ಸೊನ್ನೆಗಳೊಂದಿಗೆ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಅಭಿವ್ಯಕ್ತಿ ಕಾಣಿಸಿಕೊಂಡಿತೆ? [ಎಡ್ ಬಾರ್‌ಬ್ಯುರವರ 'ಪಾಲಿನಾಮಿಯಲ್ಸ್' ನಿಂದ]

ಲೆಕ್ಕ VI-2-S.2

P (t) ಅನ್ನು ಒಂದು ಮಾನಿಕ್ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ . (ಮಾನಿಕ್ ಎಂಬ ಪದವು ಪ್ರಮುಖ ಸಹಾಂಕ 1 ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $x^2 + 10x + 100$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಮಾನಿಕ್ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವಾಗಿದೆ; ಆದರೆ $3x^2 + 10x + 100$ ಇದರ ಮುಖ್ಯ ಸಹಾಂಕ 3 ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಇದು ಮಾನಿಕ್ ಅಲ್ಲ. ಯಾವುದೇ ಛಲಪರಿಮಾಣ n ಗೆ, $p(n)\,p(n + 1) = p(k)$ ನಂತಹ ಒಂದು ಛಲಪರಿಮಾಣ k ಇರುತ್ತದೆ. [ಎಡ್ ಬಾರ್‌ಬ್ಯುರವರ 'ಪಾಲಿನಾಮಿಯಲ್ಸ್' ನಿಂದ]

ಲೆಕ್ಕ VI-2-S.3

ಸತತ ನಾಲ್ಕು ಧನಾತ್ಮಕ ಛಲಪರಿಮಾಣಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಎರಡು ಸತತ ಧನಾತ್ಮಕ ಛಲಪರಿಮಾಣಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರಲಾರದು ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
[ಬ್ರಿಟೀಶ್ ಗಣಿತ ಒಲಂಪಿಯಾಡ್, ೨೦೧೧ ರ ಮೊದಲ ಸುತ್ತಿನಿಂದ]

ಲೆಕ್ಕ VI-2-S.4

$n^2 + 20n + 11$ ಒಂದು ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಾದರೆ, n ನ ಎಲ್ಲಾ ಛಲಪರಿಮಾಣಗಳನ್ನು ಕಂಡಿಹಿಡಿಯಿರಿ.
[ಬ್ರಿಟೀಶ್ ಗಣಿತ ಒಲಂಪಿಯಾಡ್, ೨೦೧೧ ರ ಮೊದಲ ಸುತ್ತಿನಿಂದ]

ಲೆಕ್ಕ VI-2-S.5

$x^2 + y^2 + z^2 = 2(yz + 1)$ ಹಾಗು $x + y + z = 4018$ ಆದರೆ, x, y, ಹಾಗು z ನ ಛಲಪರಿಮಾಣ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. [ಬ್ರಿಟೀಶ್ ಗಣಿತ ಒಲಂಪಿಯಾಡ್, ೨೦೦೯ ರ ಮೊದಲ ಸುತ್ತಿನಿಂದ]

ಮುಖ್ಯಪದಗಳು : *ಛಲಪರಿಮಾಣ, ಘನ, ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗ, ಪರಿಪೂರ್ಣ ಘನ, ಶ್ರೇಢಿಗಳು, ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜ*

ಸಂಚಿಕೆ-VI-1 ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಪರಿಹಾರಗಳು (ಮಾರ್ಚ್ 2017)

ಲೆಕ್ಕ VI-1-S.1 ಗೆ ಪರಿಹಾರ

ABCD ಒಂದು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜ, AC, BD ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ವಿಕರ್ಣಗಳು X ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕೂಡುತ್ತವೆ ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ. P ಎಂಬುದು BC ನ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ. AD, PX ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ. BXC ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ, $\measuredangle BXC = 90^0$ ಹಾಗು P ವಿಕರ್ಣ BC ಗೆ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ XP = BP = CP . PX ಹಾಗು AD ವಿಕರ್ಣಗಳು Q ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕೂಡುತ್ತವೆ ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ . ಈಗ $\measuredangle ADX = \measuredangle ADB = \measuredangle ACB = \measuredangle XCP = \measuredangle PXC = \measuredangle AXQ$,

ಹಾಗು

$\measuredangle DAX = \measuredangle DAC = \measuredangle DBC = \measuredangle XBP = \measuredangle BXP = \measuredangle DXQ$.

ಆದ್ದರಿಂದ ADX ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ, $\measuredangle ADX = \measuredangle AXQ$ ಹಾಗು $\measuredangle DAX = \measuredangle DXQ$.

ಆದ್ದರಿಂದ $\measuredangle AQX = \measuredangle DQX = 90^0$.

ಲೆಕ್ಕ VI-1-S.2 ಗೆ ಪರಿಹಾರ

a, b, c ಮೂರು ವಿಭಿನ್ನ ಶೂನ್ಯ-ಅಲ್ಲದ ನೈಜ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರಲಿ. a, b, c ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು b, c, a ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳಲ್ಲಿದ್ದರೆ, c, a, b ಎಂಬುದು ಹರಾತ್ಮಕ ಶ್ರೇಢಿಗಳಲ್ಲಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ ಮತ್ತು a:b:c ಅನುಪಾತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ. ನೀಡಿರುವ ನಿರ್ಬಂಧಗಳಿಂದ ತಿಳಿಯುವುದೇನೆಂದರೆ

$2b = a + c$, $c^2 = ab$.

ಆದ್ದರಿಂದ

$$\frac{2bc}{b+c}=\frac{a.c+c.c}{b+c}=\frac{ac+ab}{b+c}=a,$$

c, a, b ಗಳು ಹರಾತ್ಮಕ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ. a ಅನ್ನು ತೆಗೆದುಹಾಕುವುದರಿಂದ ನಮಗೆ ಇವು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ

$2b^2 - bc - c^2 = (b - c)(2b + c) = 0$.

ಆದ್ದರಿಂದ $b = -\frac{c}{2}$, ಹಾಗು $a = 2b - c = -2c$.

ಆದ್ದರಿಂದ $a : b : c = -2 : -\frac{1}{2} : 1 = 4 : 1 : -2$.

ಲೆಕ್ಕ VI-1-S.3 ಗೆ ಪರಿಹಾರ

ಕೆಳಗಿನ ಪರಿಮಾಣ ಭಲಪರಿಮಾಣವಲ್ಲ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ :

$$\frac{2}{3}+\frac{4}{5}+\frac{6}{7}+...+\frac{2016}{2017}.$$

ಪರಿಹಾರ. S = $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}+\frac{6}{7}+...+\frac{2016}{2017}$. ಎಂದು ಇರಲಿ. S ಭಲಪರಿಮಾಣವಾಗಿದ್ದರೆ ಕೆಳಗಿನದೂ ಕೂಡ ಅದೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ

T = 1008 − S = $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+...+\frac{1}{2017}$.

M = 3 · 5 · 7 · · · 2015 ಎಂದು ಇರಲಿ. T ಭಲಪರಿಮಾಣವಾಗಿದ್ದರೆ ಕೆಳಗಿನದೂ ಕೂಡ ಅದೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ
MT = $\frac{M}{3}+\frac{M}{5}+\frac{M}{7}+...+\frac{M}{2017}$.

ಕೊನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ ಪ್ರತಿ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಭಲಪರಿಮಾಣವಾಗಿದೆ . ಆದ್ದರಿಂದ $\frac{M}{2017}$. ಭಲಪರಿಮಾಣ. ಆದರೆ 2017 ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುವುದರಿಂದ M ನ ಜೊತೆಯಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಅಪವರ್ತನ ಇಲ್ಲದಿರುವುದರಿಂದ M ಅನ್ನು ವಿಭಜಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ನಾವು ವಿರೋಧಾಭಾಸಕ್ಕೆ ಬರುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ S ಭಲಪರಿಮಾಣವಾಗಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಲೆಕ್ಕ VI-1-S.4 ಗೆ ಪರಿಹಾರ

ಆರು ಸತತ ಧನಾತ್ಮಕ ಭಲಪರಿಮಾಣಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಪರಿಪೂರ್ಣ ಘನವಾಗಲಾರದು ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
ಪರಿಹಾರ. 6 ! = 720 ಇದು ಪರಿಪೂರ್ಣ ಘನವಲ್ಲ, ಆದ್ದರಿಂದ ನಾವು ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕು
$t = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)$ ಇಲ್ಲಿ $n \geq 2$. ಈಗ $t = a^3 + 10a^2 + 24a$

ಇಲ್ಲಿ $a = n(n+5)$. ಯಾಕೆಂದರೆ $a \geq 14$, ಈಗ ನಮಗೆ :
$(a+3)^3 = a^3 + 9a^2 + 27a + 27$
$= t - (a-9)(a+3) - 3a < t < a^3 + 12a^2 + 48a + 64$
$= (a+4)^3$.
ಆದ್ದರಿಂದ t ಪರಿಪೂರ್ಣ ಘನವಾಗದು.

ಲೆಕ್ಕ VI-1-S.5 ಗೆ ಪರಿಹಾರ

ಬಾಹು a ಅನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ಚೌಕವನ್ನು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಬಿಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ಹೀಗೆ ಪಡೆಯಲಾದ ಭಾಗಗಳ ಒಂದು ರೇಖಾಖಂಡದಲ್ಲಿ ಬಿಡಿಸಿದ ಚೌಕದ ಬಾಹುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ. ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವು $\frac{a}{\sqrt{2}}$ ಆಗಿದೆ. ಸಮಮಿತಿಯಿಂದ ತಿಳಿಯುವುದೇನೆಂದರೆ ರೇಖಾಖಂಡದಲ್ಲಿ ಬಿಡಿಸಿದ ಚೌಕದ ಬಾಹುಗಳು ದೊಡ್ಡ ಚೌಕಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿವೆ . ಬಿಡಿಸಿದ ಚೌಕದ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದವು x ಅಂದುಕೊಂಡರೆ, ನಮಗೆ ಇದು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ

$$\left(\frac{a}{2}+x\right)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{a^2}{2}.$$

ಇದನ್ನು ಪರಿಹರಿದಾಗ $5x^2 + 4ax - a^2 = 0$.

ಆದ್ದರಿಂದ $x = \frac{a}{5}$.