# ಲಂಬ ವಿಕರ್ಣಗಳ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು

ಈ ಲೇಖನದಲ್ಲಿ, ತನ್ನ ಎರೆಡು ವಿಕರ್ಣಗಳನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕೆಲವು ಗುಣಗಳನ್ನು ನಾವು ಅಭ್ಯಸಿಸುತ್ತೇವೆ. ನಾಲ್ಕು ಬಾಹುಗಳ ಚಿತ್ರವೊಂದು ಈ ಗುಣವನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದಲ್ಲಿ ಅದನ್ನು ನೇರ -ವಿಕರ್ಣ ಚತುರ್ಭುಜ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿರುವ ಹಲವು ನಾಲ್ಕು ಬಾಹುಗಳ ಆಕಾರಗಳೂ ಕೂಡ ಇದೇ ಗುಣವನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ : ಚೌಕಗಳು, ವಜ್ರಾಕೃತಿಗಳು (ಇಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕು ಬಾಹುಗಳು ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ ) ಹಾಗು ಗಾಳಿಪಟಗಳು (ಇಲ್ಲಿ ಎರೆಡು ಜೋಡಿ ನಿಕಟಬಾಹುಗಳು ಸಮನಾದ ಉದ್ದವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ ). ಓದುಗರಿಗೆ ಆಶ್ಚರ್ಯವಾಗಬಹುದು ಆದರೆ ಇಂತಹ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬೇಡಿಕೆಗಳೂ (ವಿಕರ್ಣಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಲಂಬವಾಗಿರುವುದು) ಸಹ ಹಲವಾರು ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಹಾಗು ಆಹ್ಲಾದಕರ ಗುಣಗಳಿಗೆ ಎಡೆಮಾಡಿಕೊಡುತ್ತದೆ.

**ಗುಣ ೧ :** ವಿರುದ್ಧ ಬಾಹುಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತಗಳು

**ಪ್ರಮೇಯ ೧.** ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಕರ್ಣಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಲಂಬಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ವಿರುದ್ಧ ಬಾಹುಗಳ ಎರೆಡು ಜೋಡಿಗಳು ಸಮನಾದ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ.

ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ABCD ಎಂದು ಹೆಸರಿಸೋಣ (ಚಿತ್ರ ೧ ಅನ್ನು ನೋಡಿ). ಈಗ ಪ್ರಮೇಯವು ಹೀಗೆ ಹೇಳುತ್ತದೆ : $AC \perp BD$ ಆದರೆ, $AB^2+CD^2 = AD^2 + BC^2$. ಇದಕ್ಕೆ ಸಾಧನೆ ಹೀಗಿದೆ. AC ಯು BD ಅನ್ನು ಮುಟ್ಟುವ ಜಾಗವನ್ನು O ಬಿಂದು ತೋರಿಸುವಂತೆ, ಪೈಥಾಗೋರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ ಹೀಗಿವೆ :

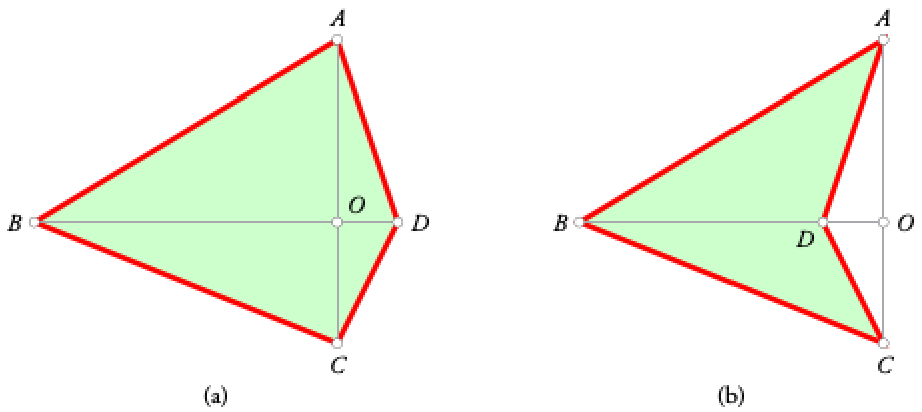
$AB^2 = AO^2 + BO^2$ , $CD^2 = CO^2 + DO^2$ ,

$AD^2 = AO^2 + DO^2$ , $BC^2 = BO^2 + CO^2$

ಹಾಗು ನಾವು ನೋಡುವಂತೆ

$AB^2 + CD^2 = AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2 = AD^2 + BC^2$ .

**ಮುಖ್ಯಪದಗಳು:** ಚತುರ್ಭುಜ, ಲಂಬ, ವಿಕರ್ಣ, ನೇರ-ವಿಕರ್ಣ, ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜ, ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ, ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಆಯತ, ಮಧ್ಯಬಿಂದು ವೃತ್ತ, ೮-ಬಿಂದು ವೃತ್ತ,




*ಚಿತ್ರ ೧*

ಚತುರ್ಭುಜ ಪೀನವಲ್ಲದಿದ್ದರೂ ಇದೇ ನಿರ್ಣಯ ಸರಿಯಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಗಮನಿಸಬೇಕು ಹಾಗು ವಿಕರ್ಣಗಳು ಚಿತ್ರ ೧ (b) ನಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಕೂಡುತ್ತವೆ. ಅದೇ ಸಾಧನೆ ಎರೆಡು ಚಿತ್ರಗಳಿಗೆ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತದೆ.

ಇನ್ನೊಂದು ವಿಶೇಷವೆಂದರೆ, ಈ ಪ್ರತಿಪಾದನೆಗೆ ವಿಲೋಮವೊಂದಿದೆ.

**ಪ್ರಮೇಯ ೨.** ವಿರುದ್ಧ ಬಾಹುಗಳ ಎರೆಡು ಜೋಡಿಗಳು ಸಮನಾದ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ , ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಕರ್ಣಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಲಂಬಗಳಾಗಿತ್ತವೆ.

ಅಂದರೆ, $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$ ಆಗಿದ್ದಲ್ಲಿ, $AC \perp BD$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ನಾವು ಓದುಗರಿಗೆ ಇದನ್ನು ಮೊದಲು ಸಾಧಿಸಿ ನಂತರ ಮುಂದುವರೆಯಬೇಕೆಂದು ಆಶಿಸುತ್ತೇವೆ.

ನಮ್ಮ ಸಾಧನೆಯು ಪೈಥಾಗೋರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪವನ್ನು ಬಳಸುತ್ತದೆ . $\triangle$ ABC ಅಲ್ಲಿ, $a^2$ ನ ಪರಿಮಾಣವು $b^2 + c^2$ ಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು, ಕಡಿಮೆ ಅಥವಾ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ, $\measuredangle A$ ಕೋನವು 90 ◦ಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ, ಹೆಚ್ಚು ಅಥವಾ ಸಮನಾಗಿದೆಯೆ ಎಂಬುದರ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿತವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ನಮ್ಮ ಗುರಿಯು $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $\measuredangle AOB = 90$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸುವುದೇ ಆಗಿದೆ. ನಮ್ಮ ಪ್ರಸ್ತಾವವು $\measuredangle AOB$ ಲಘು ಅಥವಾ ವಿಶಾಲಕೋನವಾಗಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸುವುದು. ಹೀಗೆ ಮಾಡಿದಾಗ ನಮಗೆ ಬೇಕಿರುವ ಆ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸಾಧ್ಯತೆಯು ನಮಗೆ ದೊರಕುತ್ತದೆ.(ಯೂಕ್ಲಿಡನಿಗೆ ಈ ಪ್ರಸ್ತಾವವು ಅತಿ ಪ್ರಿಯವಾದುದು. ಆತನ 'ದಿ ಎಲಿಮೆಂಟ್ಸ್' ಪುಸ್ತಕದ ಹಲವು ಸಾಧನೆಗಳು ಈ ಪ್ರಸ್ತಾವದ ರೀತಿಯಲ್ಲೇ ಪ್ರಸ್ತುತಪಡಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿವೆ. ಶೆರ್ಲಾಕ್ ಹೋಮ್ಸ್‌ನಿಗೂ ಇದೇ ಪ್ರಸ್ತಾವ ಇಷ್ಟವಾಗಿತ್ತು! ಆತನ ಅಭಿಮಾನಿಗಳು ಅವನ ಮರೆಯಲಾಗದ ವಾಕ್ಯವನ್ನು ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು, "ನಾನು ನಿನಗೆ ಎಷ್ಟು ಬಾರಿ ಹೇಳಿದ್ದೇನೆ , ಯಾವುದು ಅಸಾಧ್ಯವೊ ಅದನ್ನು ನೀನು ತೆಗೆದುಹಾಕಿದಾಗ , ಯಾವುದು ಉಳಿಯುತ್ತದೆಯೊ ಅದು ಎಷ್ಟೇ ಅಸಂಭವನೀಯವಾಗಿದ್ದರೂ, ಅದೇ ಸತ್ಯ!)

$\measuredangle AOB$ ಲಘುಕೋನವೆಂದು ಪ್ರಾರಂಭಿಸೋಣ. ಆಗ $\measuredangle COD$ ಕೂಡ ಲಘುಕೋನವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಹಾಗು $\measuredangle BOC$ ಹಾಗು $\measuredangle DOA$ ವಿಶಾಲಕೋನಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಪೈಥಾಗೋರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ರೂಪವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯಗೊಳಿಸುವುದರಿಂದ, ನಮಗೆ ಇದು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ :

$AB^2 < AO^2 + BO^2$ , $CD^2 < CO^2 + DO^2$ ,

$AD^2 > AO^2 + DO^2$ , $BC^2 > BO^2 + CO^2$ .

ಇದರ ಜೊತೆಗೆ ನಮಗೆ ದ್ವಿ-ಅಸಮತೆಯೂ ದೊರಕುತ್ತದೆ :

$AB^2 + CD^2 < AO^2 + BO$ ಈ ಲೇಖನದಲ್ಲಿ, ತನ್ನ ಎರೆಡು ವಿಕರ್ಣಗಳನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕೆಲವು ಗುಣಗಳನ್ನು ನಾವು ಅಭ್ಯಸಿಸುತ್ತೇವೆ. ನಾಲ್ಕು ಬಾಹುಗಳ ಚಿತ್ರವೊಂದು ಈ ಗುಣವನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದಲ್ಲಿ ಅದನ್ನು ನೇರ -ವಿಕರ್ಣ ಚತುರ್ಭುಜ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿರುವ ಹಲವು ನಾಲ್ಕು ಬಾಹುಗಳ ಆಕಾರಗಳೂ ಕೂಡ ಇದೇ ಗುಣವನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ : ಚೌಕಗಳು, ವಜ್ರಾಕೃತಿಗಳು (ಇಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕು ಬಾಹುಗಳು ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ) ಹಾಗು ಗಾಳಿಪಟಗಳು (ಇಲ್ಲಿ ಎರೆಡು ಜೋಡಿ ನಿಕಟಬಾಹುಗಳು ಸಮನಾದ ಉದ್ದವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ). ಓದುಗರಿಗೆ ಆಶ್ಚರ್ಯವಾಗಬಹುದು ಆದರೆ ಇಂತಹ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬೇಡಿಕೆಗಳೂ (ವಿಕರ್ಣಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಲಂಬವಾಗಿರುವುದು) ಸಹ ಹಲವಾರು ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಹಾಗು ಆಹ್ಲಾದಕರ ಗುಣಗಳಿಗೆ ಎಡೆಮಾಡಿಕೊಡುತ್ತದೆ.

**ಗುಣ ೧ :** ವಿರುದ್ಧ ಬಾಹುಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತಗಳು

**ಪ್ರಮೇಯ ೧.** ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಕರ್ಣಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಲಂಬಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ವಿರುದ್ಧ ಬಾಹುಗಳ ಎರೆಡು ಜೋಡಿಗಳು ಸಮನಾದ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ.

ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ABCD ಎಂದು ಹೆಸರಿಸೋಣ (ಚಿತ್ರ ೧ ಅನ್ನು ನೋಡಿ). ಈಗ ಪ್ರಮೇಯವು ಹೀಗೆ ಹೇಳುತ್ತದೆ : $AC \perp BD$ ಆದರೆ, $AB^2+CD^2 = AD^2 + BC^2$. ಇದಕ್ಕೆ ಸಾಧನೆ ಹೀಗಿದೆ. AC ಯು BD ಅನ್ನು ಮುಟ್ಟುವ ಜಾಗವನ್ನು O ಬಿಂದು ತೋರಿಸುವಂತೆ, ಪೈಥಾಗೋರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ ಹೀಗಿವೆ :

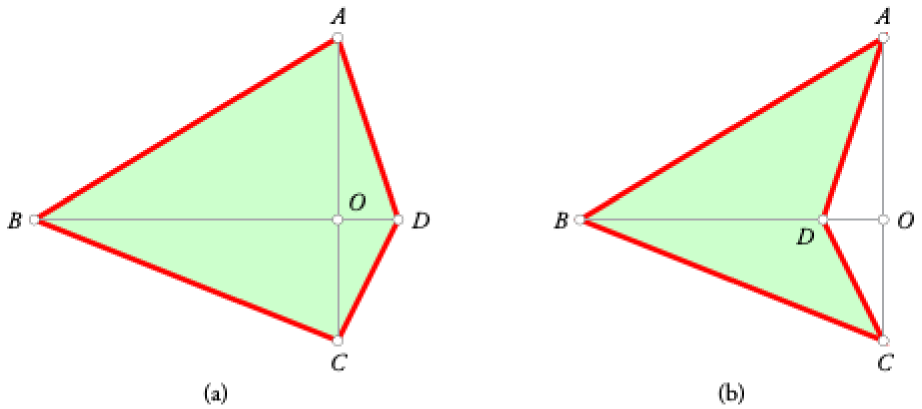
$AB^2 = AO^2 + BO^2$ , $CD^2 = CO^2 + DO^2$ ,

$AD^2 = AO^2 + DO^2$ , $BC^2 = BO^2 + CO^2$

ಹಾಗು ನಾವು ನೋಡುವಂತೆ

$AB^2 + CD^2 = AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2 = AD^2 + BC^2$ .

**ಮುಖ್ಯಪದಗಳು:** ಚತುರ್ಭುಜ, ಲಂಬ, ವಿಕರ್ಣ, ನೇರ-ವಿಕರ್ಣ, ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜ, ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ, ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಆಯತ, ಮಧ್ಯಬಿಂದು ವೃತ್ತ, ೮-ಬಿಂದು ವೃತ್ತ,




*ಚಿತ್ರ ೧*

ಚತುರ್ಭುಜ ಪೀನವಲ್ಲದಿದ್ದರೂ ಇದೇ ನಿರ್ಣಯ ಸರಿಯಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಗಮನಿಸಬೇಕು ಹಾಗು ವಿಕರ್ಣಗಳು ಚಿತ್ರ ೧ (b) ನಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಕೂಡುತ್ತವೆ. ಅದೇ ಸಾಧನೆ ಎರೆಡು ಚಿತ್ರಗಳಿಗೆ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತದೆ.

ಇನ್ನೊಂದು ವಿಶೇಷವೆಂದರೆ, ಈ ಪ್ರತಿಪಾದನೆಗೆ ವಿಲೋಮವೊಂದಿದೆ.

**ಪ್ರಮೇಯ ೨.** ವಿರುದ್ಧ ಬಾಹುಗಳ ಎರೆಡು ಜೋಡಿಗಳು ಸಮನಾದ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ , ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಕರ್ಣಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಲಂಬಗಳಾಗಿತ್ತವೆ.

ಅಂದರೆ, $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$ ಆಗಿದ್ದಲ್ಲಿ, $AC \perp BD$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ನಾವು ಓದುಗರಿಗೆ ಇದನ್ನು ಮೊದಲು ಸಾಧಿಸಿ ನಂತರ ಮುಂದುವರೆಯಬೇಕೆಂದು ಆಶಿಸುತ್ತೇವೆ.

ನಮ್ಮ ಸಾಧನೆಯು ಪೈಥಾಗೋರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪವನ್ನು ಬಳಸುತ್ತದೆ . $\triangle$ ABC ಅಲ್ಲಿ, $a^2$ ನ ಪರಿಮಾಣವು $b^2 + c^2$ ಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು, ಕಡಿಮೆ ಅಥವಾ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ, $\measuredangle A$ ಕೋನವು 90 ◦ಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ, ಹೆಚ್ಚು ಅಥವಾ ಸಮನಾಗಿದೆಯೆ ಎಂಬುದರ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿತವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ನಮ್ಮ ಗುರಿಯು $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $\measuredangle AOB = 90$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸುವುದೇ ಆಗಿದೆ. ನಮ್ಮ ಪ್ರಸ್ತಾವವು $\measuredangle AOB$ ಲಘು ಅಥವಾ ವಿಶಾಲಕೋನವಾಗಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸುವುದು. ಹೀಗೆ ಮಾಡಿದಾಗ ನಮಗೆ ಬೇಕಿರುವ ಆ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸಾಧ್ಯತೆಯು ನಮಗೆ ದೊರಕುತ್ತದೆ.(ಯೂಕ್ಲಿಡನಿಗೆ ಈ ಪ್ರಸ್ತಾವವು ಅತಿ ಪ್ರಿಯವಾದುದು. ಆತನ 'ದಿ ಎಲಿಮೆಂಟ್ಸ್' ಪುಸ್ತಕದ ಹಲವು ಸಾಧನೆಗಳು ಈ ಪ್ರಸ್ತಾವದ ರೀತಿಯಲ್ಲೇ ಪ್ರಸ್ತುತಪಡಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿವೆ. ಶೆರ್ಲಾಕ್ ಹೋಮ್ಸ್‌ನಿಗೂ ಇದೇ ಪ್ರಸ್ತಾವ ಇಷ್ಟವಾಗಿತ್ತು! ಆತನ ಅಭಿಮಾನಿಗಳು ಅವನ ಮರೆಯಲಾಗದ ವಾಕ್ಯವನ್ನು ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು, "ನಾನು ನಿನಗೆ ಎಷ್ಟು ಬಾರಿ ಹೇಳಿದ್ದೇನೆ , ಯಾವುದು ಅಸಾಧ್ಯವೊ ಅದನ್ನು ನೀನು ತೆಗೆದುಹಾಕಿದಾಗ , ಯಾವುದು ಉಳಿಯುತ್ತದೆಯೊ ಅದು ಎಷ್ಟೇ ಅಸಂಭವನೀಯವಾಗಿದ್ದರೂ, ಅದೇ ಸತ್ಯ!)

$\measuredangle AOB$ ಲಘುಕೋನವೆಂದು ಪ್ರಾರಂಭಿಸೋಣ. ಆಗ $\measuredangle COD$ ಕೂಡ ಲಘುಕೋನವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಹಾಗು $\measuredangle BOC$ ಹಾಗು $\measuredangle DOA$ ವಿಶಾಲಕೋನಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಪೈಥಾಗೋರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ರೂಪವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯಗೊಳಿಸುವುದರಿಂದ, ನಮಗೆ ಇದು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ :

$AB^2 < AO^2 + BO^2$ , $CD^2 < CO^2 + DO^2$ ,

$AD^2 > AO^2 + DO^2$ , $BC^2 > BO^2 + CO^2$ .

ಇದರ ಜೊತೆಗೆ ನಮಗೆ ದ್ವಿ-ಅಸಮತೆಯೂ ದೊರಕುತ್ತದೆ :

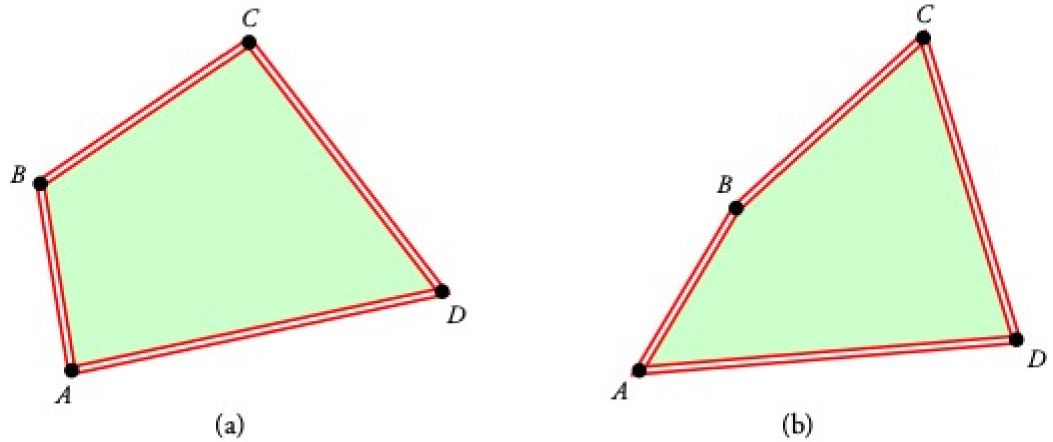
AB2 + CD2 < AO2 + BO2 $+ CO^2 + DO^2 < AD^2 + BC^2$,

ಇದರಿಂದ ನಮಗೆ $AB^2 + CD^2 < AD^2 + BC^2$ ಎಂದು ದೊರಕುತ್ತದೆ. ಇದು ನಾವು ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ನೋಡಿದಕ್ಕೆ ವಿರುದ್ಧವಾಗಿದೆ : $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$ .

ಆದ್ದರಿಂದ $\measuredangle AOB$ ಲಘುಕೋನವೆಂಬ ನಮ್ಮ ಊಹೆ ತಪ್ಪು. $\measuredangle AOB$ ಲಘುಕೋನವಾಗಲಾರದು.

ಈಗ $\measuredangle AOB$ ವಿಶಾಲಕೋನವೆಂದು ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿದರೆ, ನಮಗೆ $AB^2 + CD^2 > AD^2 + BC^2$ ಎಂದು ದೊರಕುತ್ತದೆ. ಇದೂ ಸಹ ನಾವು ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ನೋಡಿದ್ದಕ್ಕೆ ವಿರುದ್ಧವಾಗುತ್ತದೆ ಆದ್ದರಿಂದ ಇದನ್ನು ಬಿಡಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. $\measuredangle AOB$ ವಿಶಾಲಕೋನವಾಗಲಾರದು.

ಇವೆರಡರಿಂದ ಉಳಿಯುವುದು $\measuredangle AOB$ ಲಂಬಕೋನವೆಂದು; i.e., AC ಹಾಗು BD ಎರೆಡು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಈ ತೀರ್ಮಾನಕ್ಕಾಗಿ ನಾವು ಕಾಯುತ್ತಿದ್ದುದು.




*ಚಿತ್ರ ೨. ಒಂದೇ ಉದ್ದದ ಬಾಹುಗಳುಳ್ಳ ಬೆಸೆದ ಚತುರ್ಭುಜಗಳ ಜೋಡಿ*

**ಸದಿಶಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಸಾಧಿಸಿ.** 11 ಹಾಗು 12 ತರಗತಿಗಳ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಮೇಲಿನ 1 ಹಾಗು 2 ಪ್ರಮೇಯಗಳಿಗೆ ಸದಿಶಗಳ ಸಾಧನೆಯಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಲು ಆಸಕ್ತರಾಗಬಹುದು ; ಎರೆಡೂ ಪ್ರಮೇಯಗಳೂ ಒಂದೇ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಸಾಧಿಸಲ್ಪಡುತ್ತವೆ.

ನೀಡಿರುವ ಚತುರ್ಭುಜ ABCD ದಲ್ಲಿ, ಸದಿಶ AB, BC, CD ಗಳನ್ನು a , b , c ಎಂದು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಗುರುತಿಸೋಣ ; ಆಗ $AD = a + b + c$. ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಈಗ ನಮಗೆ :

$AB^2 = a \cdot a$ , $BC^2 = b \cdot b$ , $CD^2 = c \cdot c$ ,

$$AD^2 = ( a + b + c ) \cdot ( a + b + c )$$
$$= a \cdot a + b \cdot b + c \cdot c + 2 ( a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c ).$$ ಎಂದು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $AD^2 + BC^2 - AB^2 - CD^2 = 2 ( b \cdot b + a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c )$
$$= 2 ( a + b ) \cdot ( b + c ) = 2AC \cdot BD .$$

ಆದ್ದರಿಂದ $AD^2 + BC^2 - AB^2 - CD^2 = 0$, $AC \perp BD$ ಇದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ.

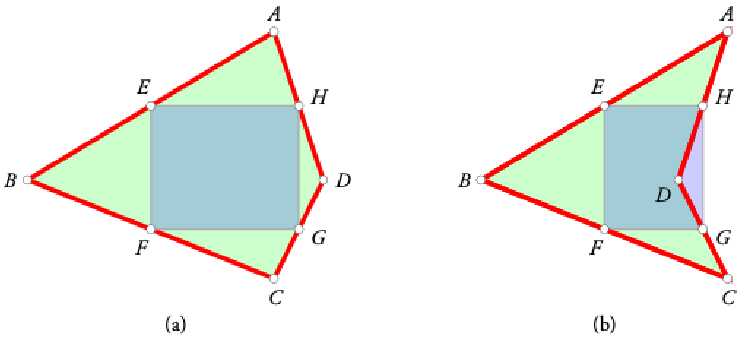
**ಎರಡನೇ ಗುಣ : ದೃಢತೆ**

ಪ್ರಮೇಯ ೨ ಬಹುಭುಜಗಳ ದೃಢತೆಯ ಸಂಬಂಧಕ್ಕೆ ಪರಿಣಾಮ ಬೀರುತ್ತದೆ.

ತ್ರಿಭುಜ ದೃಢವಾದುದೆಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ : ತ್ರಿಭುಜದ ಅಸಮತೆಯನ್ನು ಸಾಧಿಸುವ ೩ ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ನೀಡಿದೆ (i.e., ಅತಿ ಉದ್ದದ ಬಾಹುವು ಇನ್ನುಳಿದ ಎರೆಡರ ಮೊತ್ತಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇರುತ್ತದೆ ) ಇವುಗಳನ್ನು ಸರಿದೂಗಿಸುವ ಒಂದೇ ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜ ಇದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದರ ರೂಪವು ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ತ್ರಿಭಿಜದ ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಸಲಾಕೆಗಳನ್ನು ಬಳಸಿದರೆ, ಅವುಗಳನ್ನು ನಟ್ ಹಾಗು ಬೋಲ್ಟ್‌ಗಳಿಂದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಿದರೆ, ರಚನೆಯು ದೃಢವಾಗಿ ಹಾಗು ಸ್ಥಿರವಾಗಿರುತ್ತದೆ; ಒತ್ತಡಕ್ಕೊಳಗಾದಾಗ ಅದು ಆಕಾರವನ್ನು ಕಳೆದುಕೊಳ್ಳುವುದಿಲ್ಲ.

ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ಸೃಷ್ಟಿಸಿದ ಚತುರ್ಭುಜ ದೃಢವಾಗಿಲ್ಲ; 4 ನೀಡಿರುವ ಉದ್ದದ ಬಾಹುಗಳಿಂದ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದರೆ (ಅತೀ ಉದ್ದದ ಬಾಹುವು ಇನ್ನುಳಿದ ೩ ಬಾಹುಗಳಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿರುತ್ತದೆ), ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಒಳಕ್ಕೆ ತಳ್ಳಬಹುದು ಅಥವಾ ಹೊರಕ್ಕೆ ಎಳೆಯಬಹುದು ಹಾಗು ಇದರ ಆಕಾರ ವಿರೂಪಗೊಳಿಸಬಹುದು. ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ಅಸಂಖ್ಯಾತ ವಿಭಿನ್ನ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು ಒಂದೇ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದವನ್ನು ಹಂಚಿಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ . ಚಿತ್ರ ೨ರಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಈಗ ಇರುವ ನಾಲ್ಕು ಸಲಾಕೆಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ "ಕೂಡಿದ ಚತುರ್ಭುಜ"ದ ನಿರ್ಮಾಣವಾಗಲಿ. ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದಂತೆ ವಿಕರ್ಣಗಳಲ್ಲಿ ಒಳಗೆ ಅಥವಾ ಹೊರಗೆ ಒತ್ತಡಕ್ಕೊಳಪಡಿಸಿದಾಗ ಇದರ ಆಕಾರ ವಿರೂಪಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಯಾವುದೇ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ವಿಕರ್ಣಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಲಂಬವಾಗಿದ್ದರೆ ಈ ಗುಣ ಎಂದಿಗೂ ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ , ಎಷ್ಟೇ ಒತ್ತಡಕ್ಕೊಳಪಡಿಸಿದರೂ ಚತುರ್ಭುಜದ ಆಕಾರವನ್ನು ವಿರೂಪಗೊಳಿಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ . ವಿಕರ್ಣಗಳು ಯಾವಾಗಲೂ ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತವೆ.




*ಚಿತ್ರ ೩*

**ಮೂರನೇ ಗುಣ : ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಆಯತ**

ಈ ಗುಣ 9 ಮತ್ತು 10 ನೇ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಅಚ್ಚರಿಯೆನಿಸುವುದಿಲ್ಲ , ಅವರು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಪ್ರಮೇಯದೊಂದಿಗೆ ಪರಿಚಿತರಾಗಿದ್ದಾರೆ. ಇದನ್ನು ಚಿತ್ರ 3 ರಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಚತುರ್ಭುಜ ABCD ಅಲ್ಲಿ, AB , BC , CD , DA ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ E , F , G , H ಎಂದಿರಲಿ. ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಪ್ರಮೇಯದ ಮೂಲಕ, EF ಹಾಗು HG ರೇಖಾಖಂಡಗಳು AC ವಿಕರ್ಣಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿವೆ , FG ಹಾಗು EH ರೇಖಾಖಂಡಗಳು BD ವಿಕರ್ಣಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಚತುರ್ಭುಜ EFGH ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ; ಇದನ್ನು ABCD ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. (ಈ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ವಾರಿಗ್ನಾನ್ ಪ್ರಮೇಯ (Varignon's Theorem) ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಇದು ಎಲ್ಲಾ ಚತುರ್ಭುಜಗಳಿಗೂ ಸರಿಯಾಗುತ್ತದೆ). ಆದ್ದರಿಂದ ABCD ಯ ವಿಕರ್ಣಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಲಂಬವಾಗಿದ್ದರೆ EFGH ನ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳು ಲಂಬಕೋನಗಳಾಗುತ್ತವೆ. ಇದು ಪ್ರಮೇಯ 3 ಅನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ.

**ಪ್ರಮೇಯ 3.** ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಕರ್ಣಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಲಂಬವಾಗಿದ್ದರೆ, ಅದರ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಯಾವಾಗಲೂ ಆಯತವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಮುಂಚಿನಂತೆಯೇ, ಚತುರ್ಭುಜವು ಪೀನವಲ್ಲದಿದ್ದರೂ ಚಿತ್ರ 3 (b)ನಂತೆ ಈ ಫಲಿತಾಂಶ ಸರಿಯಾಗುತ್ತದೆ. ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ಈಗ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಆಯತ ಎಂದು ಕರೆಯಬಹುದು.

ಮುಂದಿನಂತೆ ಪ್ರಮೇಯ 3 ರ ವಿಲೋಮವೂ ಸರಿಯಿದೆ :

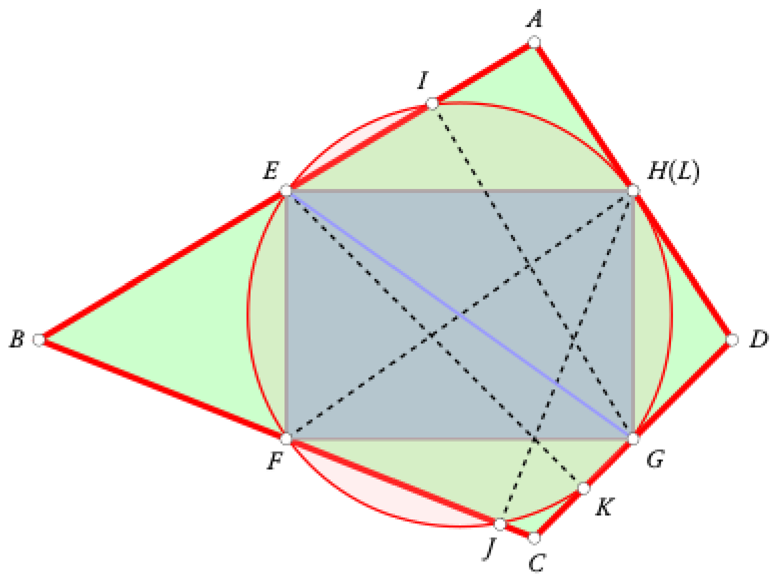
**ಪ್ರಮೇಯ 4.** ಚತುರ್ಭುಜದ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವು ಆಯತವಾಗಿದ್ದರೆ, ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಕರ್ಣಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಇದರ ಪುರಾವೆ ಬಹಳ ಸುಲಭವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ನಾವು ಅದನ್ನು ಬಿಟ್ಟಿದ್ದೇವೆ.

**ನಾಲ್ಕನೇ ಗುಣ : ಮಧ್ಯಬಿಂದು ವೃತ್ತ**

ಆಯತವು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಶೇಷ ಪ್ರಕರಣವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಯಾವುದೇ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಅದರ ವಿಕರ್ಣಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಲಂಬವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ, ಅದರ ೪ ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವಂತೆ ವೃತ್ತವೊಂದು ಇರುತ್ತದೆ. ವೃತ್ತವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ರೇಖೆಯು ಎರಡನೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿಯೂ ಅದನ್ನೇ ಮಾಡಬೇಕು (ಮೊದಲು ಛೇದಸಿದ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸಾಧ್ಯವಾದರೆ, ಈಗಾದರೆ ಅದು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯಾಗುತ್ತದೆ )

ಈಗ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ವೃತ್ತವು ಎಲ್ಲಾ ನಾಲ್ಕು ಬಾಹುರೇಖೆಗಳನ್ನು ಭೇದಿಸಬೇಕು , ಇದರಿಂದ ನಾಲ್ಕು ವಿಶೇಷ ಬಿಂದುಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ ; ಚಿತ್ರ ೪ ಅನ್ನು ನೋಡಿ. ಬಿಂದುಗಳು ಯಾವುವು?
ಚಿತ್ರ ೪ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಯನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ E , F , G , H ಹಾಗು ವೃತ್ತ (EFGH) ನಾಲ್ಕು ಬಾಹುಗಳನ್ನು I , J , K , L ಎಂಬ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಭೇಧಿಸುತ್ತದೆ. (ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ತದಲ್ಲಿ L ಹಾಗು H ಎರೆಡೂ ಒಂದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿವೆ, ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಇದು ಈಗಾಗುವುದಿಲ್ಲ.)
EG ಹಾಗು FH ರೇಖಾಖಂಡಗಳು (EFGH ಆಯತದ ವಿಕರ್ಣಗಳು) ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ I ಎಂಬುದು G ನಿಂದ AB ರೇಖೆಗೆ ಎಳೆದಿರುವ ಲಂಬವಾಗಿದೆ; J ಎಂಬುದು H ನಿಂದ BC ರೇಖೆಗೆ ಎಳೆದಿರುವ ಲಂಬವಾಗಿದೆ; K ಎಂಬುದು E ನಿಂದ CD ರೇಖೆಗೆ ಎಳೆದಿರುವ ಲಂಬವಾಗಿದೆ; L ಎಂಬುದು F ನಿಂದ DA ರೇಖೆಗೆ ಎಳೆದಿರುವ ಲಂಬವಾಗಿದೆ (ಥೇಲ್ಸ್‌ನ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ : "ಅರೆವೃತ್ತಲ್ಲಿರುವ ಕೋನವು ಲಂಬಕೋನವಾಗಿರುತ್ತದೆ")
ನಾವು ಈಗ ನಾಲ್ಕು ಹೊಸ ಬಿಂದುಗಳು ಯಾವುವೆಂದು ಗುರುತಿಸಿದ್ದೇವೆ : ಅವು ಒಂದು ಬಾಹುವಿನ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವಿರುದ್ಧ ಬಾಹುಗಳಿಂದ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳ ಕಾಲುಗಳು. ಎಂಟು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ವೃತ್ತವನ್ನು ಚತುರ್ಭುಜದ ಎಂಟು-ಬಿಂದುಗಳ ವೃತ್ತವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ(ಹೆಚ್ಚು ಪ್ರಚಲಿತದಲ್ಲಿರುವ ಒಂಬತ್ತು ಬಿಂದು ವೃತ್ತದಂತೆ).



ಚಿತ್ರ ೪

ನಾವು ಬಿಡಿಸಿರುವ ನಾಲ್ಕು ಲಂಬಗಳನ್ನು (ಒಂದು ಬಾಹುವಿನ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವಿರುದ್ಧ ಬಾಹುಗಳಿಗೆ) ಚತುರ್ಭುಜದ ಮಾಲ್ಟಿಟ್ಯೂಡ್ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಇದೇ ರೀತಿಯ ರಚನೆಯನ್ನು ಯಾವುದೇ ಚತುರ್ಭುಜಕ್ಕೆ ಮಾಡಬಹುದು. ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಇನ್ನೂ ಬಲವಾಗಿ ಹೀಗೆ ಹೇಳಬಹುದು:
**ಪ್ರಮೇಯ 5.** ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಕರ್ಣಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಲಂಬವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ, ನಾಲ್ಕು ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳು ಹಾಗು ನಾಲ್ಕು ಮಾಲ್ಟಿಟ್ಯೂಡ್‌ಗಳ ಕಾಲುಗಳು ಒಂದೇ ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ ಬೀಳುತ್ತವೆ.
ಈ ಹೇಳಿಕೆಯ ವಿಲೋಮವೂ ಸರಿಯಿದೆ:
**ಪ್ರಮೇಯ 6.** ನಾಲ್ಕು ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳು ಹಾಗು ನಾಲ್ಕು ಮಾಲ್ಟಿಟ್ಯೂಡ್‌ಗಳ ಕಾಲುಗಳು ಒಂದೇ ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ ಬಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಕರ್ಣಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

**ಐದನೇ ಗುಣ : ಬ್ರಹ್ಮಗುಪ್ತನ ಪ್ರಮೇಯ**

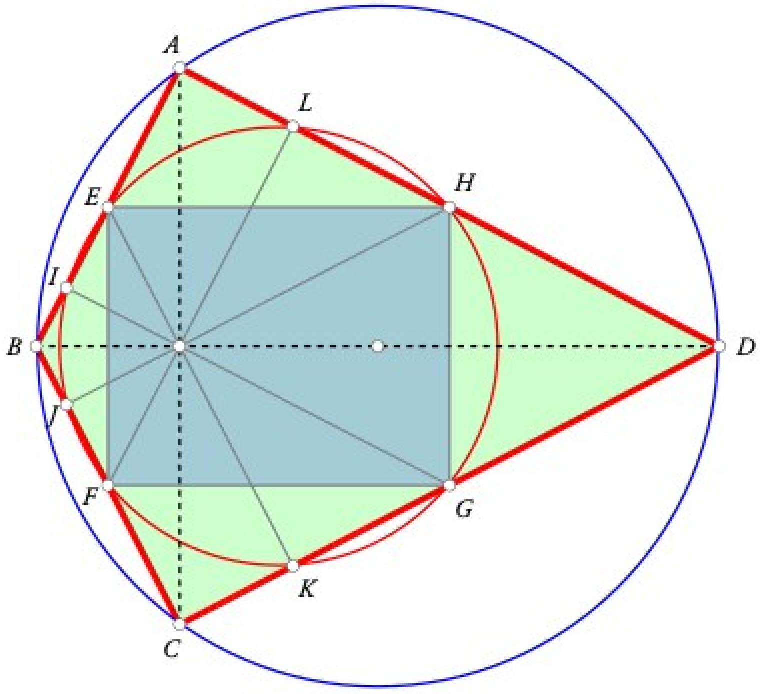
ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ, ವಿಕರ್ಣಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜಗಳ ಒಂದು ಆಸಕ್ತಿದಾಯಕ ಗುಣದ ಬಗ್ಗೆ ತಿಳಿಯುತ್ತೇವೆ ಆದ್ದರಿಂದ ಚತುರ್ಭುಜಕ್ಕೆ ನಾವು 'ಚಕ್ರೀಯ' ಎಂಬ ಒಂದು ಹೆಚ್ಚುವರಿ ಗುಣವನ್ನು ನೀಡಿದ್ದೇವೆ. ಈ ಗುಣವನ್ನು ಮೊದಲು ತೋರಿಸಿದವು ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞ ಬ್ರಹ್ಮಗುಪ್ತ (೭ನೇ AD).
ಚಿತ್ರ ೫ ಈ ಗುಣವನ್ನು ಬಿತ್ತರಿಸುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿರುವ ಚತರ್ಭುಜವು ABCD, ಇದರ ವಿಕರ್ಣಗಳು AC ಹಾಗು BD ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಲಂಬವಾಗಿವೆ. ಇದರ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳು E , F , G , H ಹಾಗು EFGH ಒಂದು ಆಯತ. E , F , G , H ಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾಯುವ ವೃತ್ತವು ನಾಲ್ಕು ಬಾಹುಗಳಲ್ಲಿ ಭೇಧಿಸುತ್ತದೆ ಹಾಗು ಮತ್ತೊಮ್ಮೆ I , J , K , L ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಭೇಧಿಸುತ್ತದೆ.

AC ಹಾಗು BD ಬಾಹುಗಳ ಛೇಧಕ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವಂತೆ EK , FL , GI , HJ ರೇಖಾಖಂಡಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ. ಈಗ ನಮ್ಮ ಬಳಿ ೬ ವಿವಿಧ ರೇಖಾಖಂಡಗಳು ಒಂದೇ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುತ್ತಿವೆ.

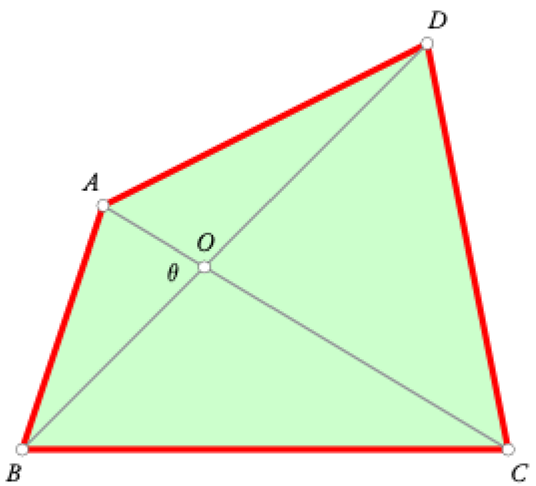
ಇದಲ್ಲದೆ, EK ⊥ CD, FL ⊥ DA, GI ⊥ AB ಹಾಗು HJ ⊥ BC !

ಎಂಥಹ ಸುಂದರ ಫಲಿತಾಂಶ. ನಾವು ಇದನ್ನು ಪ್ರಮೇಯವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

**ಪ್ರಮೇಯ** 7 (ಬ್ರಹ್ಮಗುಪ್ತ). ಚತುರ್ಭುಜವು ಚಕ್ರೀಯ ಹಾಗು ನೇರ-ವಿಕರ್ಣ ಎರೆಡೂ ಆಗಿದ್ದಲ್ಲಿ, ವಿಕರ್ಣಗಳು ಛೇಧಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಯಾವುದೇ ಬಾಹುವಿಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬವು ವಿರುದ್ಧ ಬಾಹುವನ್ನು ಎರೆಡು ಭಾಗವಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸುತ್ತದೆ.




*ಚಿತ್ರ ೫*




*ಚಿತ್ರ ೬*

ಆರನೇ ಗುಣ : ಸಲೆ

ಈ ಲೇಖನವನ್ನು ಚತುರ್ಭುಜಗಳ ಸಲೆಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಚರ್ಚೆಯಲ್ಲಿ ಮುಕ್ತಾಯಗೊಳಿಸುತ್ತೇವೆ.

ನಾವು ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸುತ್ತೇವೆ: ಚತುರ್ಭುಜದ ನಾಲ್ಕು ಬಾಹುಗಳು ಹಾಗು ಎರೆಡು ವಿಕರ್ಣಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವನ್ನು ನಾವು ತಿಳಿದಿದ್ದರೆ, ಅದರ ಸಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದೇ?

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಉತ್ತರ "ಹೌದು" ಎಂಬುದು ಆದರೆ ಸುಮ್ಮನೆ ಅಲ್ಲ - ಈ ಕಥೆಗೆ ನೀವು ನಿರೀಕ್ಷಿಸದ ತಿರುವೊಂದಿದೆ.

ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ABCD ಎಂದು ಹೆಸರಿಸಿ, AB , BC , CD , DA ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದವು ಕ್ರಮವಾಗಿ a , b , c , d , AC ಹಾಗು BD ವಿಕರ್ಣಗಳ ಛೇಧಕ ಬಿಂಉವು O ಆಗಿರಲಿ, ಹಾಗು ವಿಕರ್ಣಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವು θ ಆಗಿರಲಿ. ನಾವು ಸಲೆ k ಅನ್ನು a , b , c , d , θ ಗಳ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು. ತ್ರಿಭುಜದ ಸೈನ್ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸಿದಾಗ, ಚತುರ್ಭುದ ಸಲೆಯನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ತೋರಿಸಬಹುದು

$$k=\frac{1}{2}AC\times BD\times \sin\theta \quad .$$

ನಾವು ಮೊದಲನೇ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ $AD^2 + BC^2 - AB^2 - CD^2 = 2AC \cdot BD$

$$|AD^2+BC^2-AB^2-CD^2|=2\,AC\times BD\times|\cos\theta|$$

(ಇಲ್ಲಿ ನಾವು ಶುದ್ದ ರೂಪವನ್ನು ಬಳಸಿದ್ದೇವೆ, ಇಲ್ಲಿ ಚಿಹ್ನೆಗಳು ನಗಣ್ಯ; ನಮಗೆ ಬೇಕಿರುವುದು ಶುದ್ದ ರೂಪ ಮಾತ್ರ) ಆದ್ದರಿಂದ

$$AC \times BD = \frac{|AD^2+BC^2-AB^2-CD^2|}{2|\cos\theta|}$$

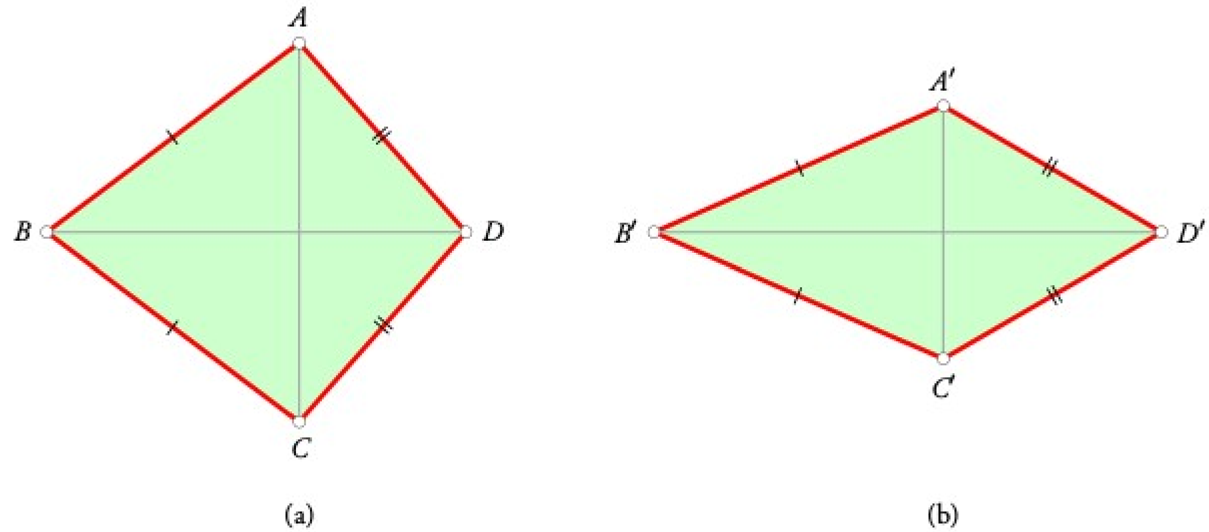
ಇದು ನಮಗೆ ಬೇಕಿರುವ ಚತುರ್ಭುದ ಸಲೆಯ ಸೂತ್ರವನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ

$$k = \frac{|AD^2+BC^2-AB^2-CD^2|\times|\tan\theta|}{4}$$

ಈ ಹಂತದಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ವಿಶೇಷವಾದ ಫಲಿತಾಂಶ ದೊರಕುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿರುವ ಚತುರ್ಭುಜ ನಾವು ಪರೀಕ್ಷಿಸುತ್ತಿರುವ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದ್ದರೆ i.e., ವಿಕರ್ಣಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಲಂಬವಾಗಿದ್ದರೆ. ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಮಧ್ಯಂತರ ರೂಪವೊಂದು ದೊರಕುತ್ತದೆ ! ಇಲ್ಲಿ ಅಂಶದಲ್ಲಿ $\theta = 90^{\circ}$ ಇದ್ದರೆ $0 \times \infty$ ಎಂಬ ಗುಣಲಬ್ಧ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಅಂಕಿಅಂಶದ ಮೂಲಕ ಮಾತ್ರವಲ್ಲ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯವಾಗಿ ನೋಡಿದಾಗಲೂ ನಮಗೆ ಉತ್ತರ ದೊರಕುವುದಿಲ್ಲ. ಸಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಯಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ !

ವಿಭಾಗ II ರಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದ ವಿಮರ್ಶೆಗಳು ಇದನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸುತ್ತವೆ ; ಚತುರ್ಭುಜವು ದೃಢವಲ್ಲ ಎಂದು ನಾವು ತೋರಿಸಿದ್ದೇವೆ; ಆದರೆ ಇದು ಆಕಾರವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸುವಂತೆ, ಅದರ ವಿಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಗುಣ ಅಚಲವಾದುದು. ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂರಚನೆಯಲ್ಲಿ ಈ ಗುಣ ನಿಜವಾಗಿದ್ದರೆ , ಇದು ಯಾವಾಗಲೂ ನಿಜವಾಗುವುದು. ಈ ಸನ್ನಿವೇಶದಲ್ಲಿ ನಾವು ನೋಡುದೇನೆಂದರೆ , ಆ ಸಲೆಯು ಸಂಪೂರ್ಣ ಮೌಲ್ಯಗಳ ನಿರಂತರತೆಯನ್ನು ಪಡೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು, ಇದು ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತಲೇ.

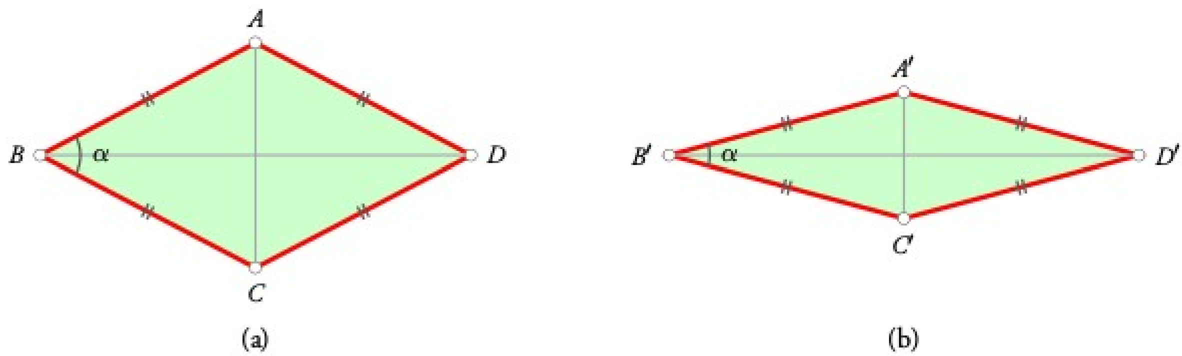
ಗಾಳಿಪಟದ ಪ್ರಕರಣ. ಚಿತ್ರ ೭ ಒಂದು ಸುಲಭ ಪ್ರಕರಣವನ್ನು ತೋರುತ್ತದೆ : ಪಕ್ಕದ ಜೋಡಿ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾನ ಉದ್ದವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವಾಗ (ಅಂದರೆ, ಚಿತ್ರವೇ ಗಾಳಿಪಟ).




ಚಿತ್ರ ೭

ABCD ಹಾಗು A ′ B ′ C ′ D ′ ಚಿತ್ರಗಳು (ಗಾಳಿಪಟಗಳು , AD = CD = A ′ D ′ = C ′ D ′ ಹಾಗು AB = BC = A ′ B ′ = B ′ C ′ ) ಅಸಮನಾದ ಸಲೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. ಲಂಬ ವಿಕರ್ಣವನ್ನು ಹೆಚ್ಚು ಜಜ್ಜಿದಂತೆ ಸಲೆಯನ್ನು ನಮಗೆ ಬೇಕಾದಂತೆ ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಬಹುದು . ವಿಕೃತ ಚತುರ್ಭುಜ ಇಲ್ಲಿರುವ ಮಿತಿಯಾಗಿದೆ. (ಯಾಕೆಂದರೆ ಇಲ್ಲಿ ಸಲೆಯಿಲ್ಲ)

ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ಪ್ರಕರಣ. ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ಪ್ರಕರಣವು ವಜ್ರಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಇನ್ನೂ ಸುಲಭವಾಗಿ ಕಾಣಿಸುತ್ತದೆ.
ವಜ್ರಾಕೃತಿಗೆ a ಎಂಬ ಬಾಹುವಿದೆ, ಹಾಗು ಇದರ ಕೋನಗಳು α ಹಾಗು 180 ◦ − α ಎಂದರೆ
0 ◦ < α ≤ 90 ◦ (ಚಿತ್ರ ೮ ಅನ್ನು ನೋಡಿ). ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ಸಲೆ a 2 sin α ಇದೆ.
α ದ ಮೌಲ್ಯವು 0 ◦ ಹಾಗು 90 ◦ರ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿದೆ , ಇದರಿಂದ ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ಸಲೆಯು 0 ಹಾಗು $a^2$ ರ ಮಧ್ಯದ ಮೌಲ್ಯದಲ್ಲಿದೆ.




ಚಿತ್ರ ೮

## ಉಲ್ಲೇಖಗಳು


1. Martin Josefsson, Characterizations of Orthodiagonal Quadrilaterals. http://forumgeom.fau.edu/FG2012volume12/FG201202.pdf
2. Wikipedia, Orthodiagonal quadrilateral. https://en.wikipedia.org/wiki/Orthodiagonal_quadrilateral
3. Wikipedia, Brahmagupta theorem. https://en.wikipedia.org/wiki/Brahmagupta_theorem

ಶೈಲೇಶ್ ಶಿರಾಲಿ ಸಹ್ಯಾದ್ರಿ ಶಾಲೆ (KFI), ಪುಣೆಯ ನಿರ್ದೇಶಕರು ಹಾಗು ಸಮುದಾಯ ಗಣಿತ ಕೇಂದ್ರ (ಕಮ್ಯೂನಿಟಿ ಮ್ಯಾತಮೆಟಿಕ್ಸ್ ಸೆಂಟರ್) ರಿಷಿ ವ್ಯಾಲಿ ಎಜುಕೇಷನ್ ಸೆಂಟರ್ (AP). ಇವರು ಭಾರತದಲ್ಲಿ ಗಣಿತ ಒಲಂಪಿಯಾಡ್ ಚಳುವಳಿಯಲ್ಲಿ ಪಾಲ್ಗೊಳ್ಳುತ್ತಿದ್ದಾರೆ. ಪ್ರೌಢ ಶಾಲಾ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಇವರು ಹಲವಾರು ಗಣಿತ ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಬರೆದಿದ್ದಾರೆ ಹಾಗು At Right Angles ನ ಸಂಪಾದಕರಾಗಿದ್ದಾರೆ. ಇವರನ್ನು shailesh.shirali@gmail.com ನಲ್ಲಿ ಸಂಪರ್ಕಿಸಬಹುದು.