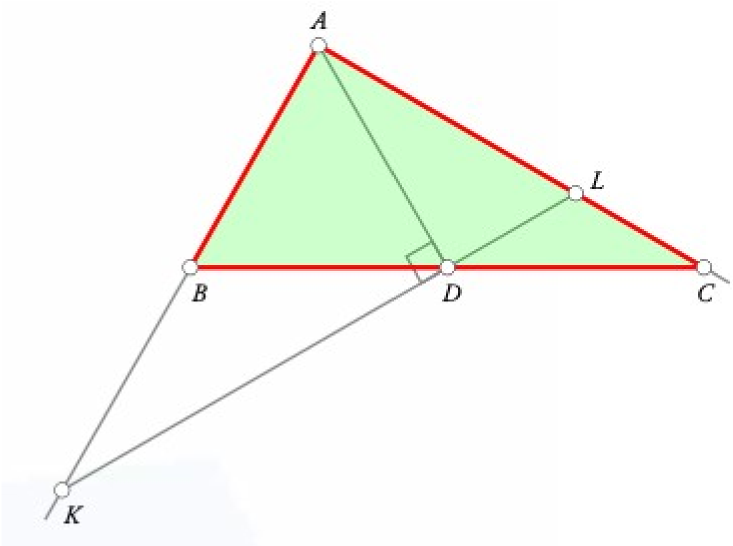
ಲಂಬ ತ್ರಿಭುಜಕ್ಕೊಂದು ಪ್ರಮೇಯ

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಫಲಿತಾಂಶವು 2016 ರ ಪ್ರಾದೇಶಿಕ ಗಣಿತ ಒಲಂಪಿಯಾಡ್‌ನಲ್ಲಿ ಬಂದ ತ್ರಿಭುಜದ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಆಧರಿಸಿದೆ.

ABC ಒಂದು ಅಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ ಎಂದುಕೊಂಡರೆ, D ಎಂಬುದು BC ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಾದರೆ, AD ಎಂಬ ಮಧ್ಯರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. D ಯ ಮೂಲಕ AD ಗೆ ಒಂದು ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ ಹಾಗು AB, AC ಗಳ ಹೆಚ್ಚುವರಿ ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಬಿಂದು K ಹಾಗು L ನಲ್ಲಿ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಕೂಡುವಂತೆ ಮಾಡಿ. ಈಗ ಬಿಂದುಗಳಾದ B , C , K , L ಗಳು BAC ಕೋನವು ಲಂಬಕೋನವಾದರೆ ಮಾತ್ರ ವೃತ್ತವೊಂದರ ಮೇಲಿರುತ್ತವೆ (ಚಿತ್ರ ೧ ಅನ್ನು ನೋಡಿ)



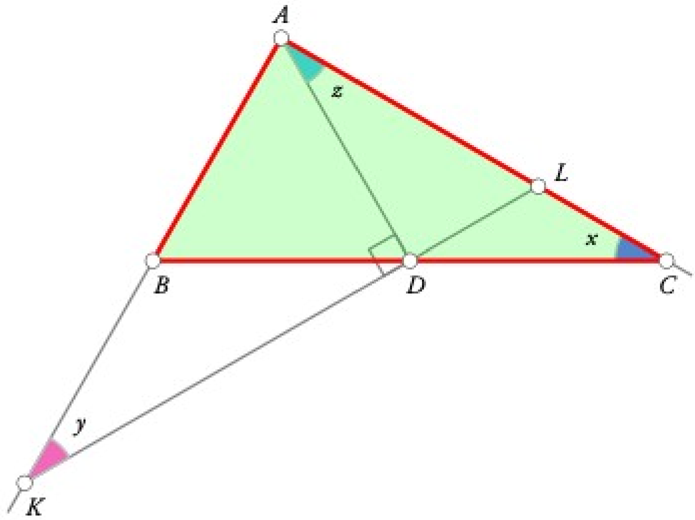
ಚಿತ್ರ ೧

ಒಂದೇ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಆಲೋಚಿಸುವುದಾದರೆ ಇದು ಸುಲಭ (ತ್ರಿಭುಜವು ಲಂಬಕೋನವಾಗಿದ್ದರೆ, ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳು ಚಕ್ರೀಯವಾಗಿವೆ) ; ಆದರೆ ಹಿಮ್ಮುಖ ಆಲೋಚನೆ ಹೆಚ್ಚು ಸವಾಲಿನಂತೆ ತೋರುತ್ತದೆ . ಎರೆಡೂ ಆಲೋಚನೆಗಳು ಸ್ಥಾಪಿತವಾಗುವಂತೆ ಮುಂದಿನ ಆಲೋಚನೆಗೆ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನು , ಅದಾದ ನಂತರ ಬೀಜಗಣಿತದ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ನೀಡುತ್ತೇವೆ.

ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳು ಚಕ್ರೀಯವಾಗಿವೆ ಎಂಬುದಕ್ಕೆ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಋಜುವಾತು . $\measuredangle BAC$ ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ಎಂಬುದಷ್ಟೆ ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ, ಹಾಗು B , K , L , C ಬಿಂದುಗಳು ಚಕ್ರೀಯವಾಗಿವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬೇಕು.

ಮುಖ್ಯ ಪದಗಳು : ಕೊಸೈನ್ ನಿಯಮ, ಛೇಧಿಸುವ ಕಾರ್ಡ್ ಪ್ರಮೇಯ, ಕೂಡಿಸುವ ಕಾರ್ಡ್ ಪ್ರಮೇಯ, ಅಪೊಲೋನಿಯಸ್, ಬಿಂದುವಿನ ಘಾತ

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ನಾಲ್ಕು ಅಂಕಗಳು ಚಕ್ರೀಯವಾಗಿವೆ ಎಂದು ಸಾಬೀತುಪಡಿಸಲು ಅತ್ಯಂತ ಸ್ಪಷ್ಟವಾದ ಮಾರ್ಗವೆಂದರೆ ಕೋನ- ಹಿಂಬಾಲಿಸುವ ಮಾರ್ಗ: ಕೆಲವು ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ. ಪ್ರಸ್ತುತ ನಿದರ್ಶನದಲ್ಲಿ, $\measuredangle AKD = \measuredangle ACD$ ಅಥವಾ $\measuredangle ALD = \measuredangle ABD$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿದರೆ ಸಾಕು . (ಈ ಎರಡು ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಪರಸ್ಪರ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ) ಚಿತ್ರ ೨ ನೋಡಿ; ನಾವು x = y ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬೇಕು.



ಚಿತ್ರ ೨

x = z ಮತ್ತು y = z ಎಂದು ಗಮನಿಸಿದಾಗ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಸಮತೆಯು ಅನುಸರಿಸುತ್ತದೆ. ಏಕೆ y = z ಇದೆ ಎಂದು ನೋಡಲು, y ಮತ್ತು z ಎರಡೂ $\measuredangle ALK$ ಗೆ ಪೂರಕವಾಗಿವೆ ($\measuredangle LAK$ ಮತ್ತು $\measuredangle ADL$ ಗಳು ಲಂಬಕೋನಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಇದು ಸಾಧ್ಯವಿದೆ). x = z ಏಕಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಲು, ತ್ರಿಭುಜ $\triangle ABC$ ಅಲ್ಲಿ ಕೋನ A ರಲ್ಲಿ ಲಂಬವಾಗಿದೆ. ಅದರ ಪರಿಭ್ರಮಣವು BC ಯ ಮಧ್ಯಭಾಗದಲ್ಲಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ . ಇದರರ್ಥ D ಯು A , B , C ನಿಂದ ಸಮದೂರದಲ್ಲಿದೆ ಎಂದು. ಆದ್ದರಿಂದ DA = DC, ಅದು x = z ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಮುಂದಿನ ಆಲೋಚನೆಯು ಸಾಧಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ : $\measuredangle BAC$ ಲಂಬಕೋನವಾಗಿದ್ದರೆ, B , K , L , C ಬಿಂದುಗಳು ಚಕ್ರೀಯವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಹಿಮ್ಮುಖ ಆಲೋಚನೆಗಾಗಿ, ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ವಿಧಾನವು ಸಿಗಲಾರದು; ನಾವು ಒಂದು ಬೀಜಗಣಿತದ ವಿಧಾನವನ್ನು ಆರಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.

ನಮಗೆ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ:

1. ಕೊಸೈನ್ ನಿಯಮದಂತೆ: $\triangle$ ABC ನಲ್ಲಿ, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$, etc;
2. ಛೇಧಿಸುವ ಕಾರ್ಡ್ ಪ್ರಮೇಯ, ಇದನ್ನು "ಕೂಡಿಸುವ ಕಾರ್ಡ್ ಪ್ರಮೇಯ" ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ ಹಾಗು 'ಬಿಂದುವಿನ ಘಾತ'ದ ಯೋಚನೆ: ಸಮತೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಲು O ಎಂಬ ಕೇಂದ್ರ ಹೊಂದಿರುವ ಹಾಗು r ಎಂಬ ತ್ರಿಜ್ಯ ಹೊಂದಿರುವ ವೃತ್ತವನ್ನು ನೀಡಲಾಗಿದೆ, EF ಹಾಗು GH ಎಂಬ ಎರೆಡು ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳು ಬಿಂದು P (ಇದು ವೃತ್ತದ ಒಳಗೆ ಅಥವಾ ಹೊರಗೆ ಇರಬಹುದು) ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ.

$PE \cdot PF = PO^2 - r^2 = PG \cdot PH$. (ಇಲ್ಲಿ ದಿಕ್ಕುಗಳಿಗೆ ಚಿಹ್ನೆಗಳಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ ; PE ಹಾಗು PF ಗಳು ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿದ್ದರೆ $PE \cdot PF \leq 0$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ) ನಮಗೆ ಈ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮವೂ ಕೂಡ ಬೇಕಿದೆ (ಅದೂ ಸರಿಯಿದೆ) : ಸಮತಲದ E , F , G , H ಬಿಂದುಗಳನ್ನು $PE \cdot PF = PG \cdot PH$ ಸಮತೆ ಸರಿಯಾಗುವಂತೆ ಇರಿಸಲಾಗಿದೆ, EF ಹಾಗು GH ಎಂಬ ಎರೆಡು ರೇಖೆಗಳು ಬಿಂದು P ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ, ಆಗ E , F , G , H ಇವು ಚಕ್ರೀಯವಾಗಿವೆ.

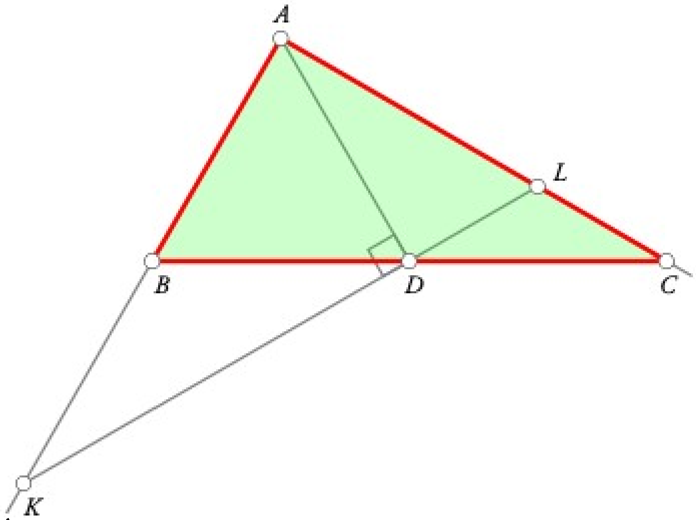
3. ಅಪೊಲೋನಿಯಸ್ ಪ್ರಮೇಯವು $AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2BD^2$ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತದೆ.

ನಾವು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಯೋಚಿಸುತ್ತೇವೆ:

B , C , K , L ಬಿಂದುಗಳು ಚಕ್ರೀಯವಾಗಿವೆ ⟸⟹ AB · AK = AC · AL

$$\Longleftrightarrow \quad c\,.\frac{AD}{\cos(\measuredangle KAD)}=b\,.\frac{AD}{\cos(\measuredangle LAD)}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{c}{b}=\frac{\cos(\measuredangle BAD)}{\cos(\measuredangle CAD)}$$



ಚಿತ್ರ ೩

ಮುಂದೆ ಕೊಸೈನ್ ನಿಯಮದಂತೆ :

$$\cos(\measuredangle BAD)=\frac{AB^2+AD^2-BD^2}{2\,AB\,.\,AD} \quad , \quad \cos(\measuredangle CAD)=\frac{AC^2+AD^2-CD^2}{2\,AC\,.\,AD}$$

ಆದ್ದರಿಂದ $\frac{\cos(\measuredangle BAD)}{\cos(\measuredangle CAD)}=\frac{AB^2+AD^2-BD^2}{AC^2+AD^2-CD^2}\cdot\frac{AC}{AB}=\frac{c^2+AD^2-a^2/4}{b^2+AD^2-a^2/4}\cdot\frac{b}{c}$

ಅಪೋಲೋನಿಯಸ್ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ :

$$AD^2=\frac{b^2}{2}+\frac{c^2}{2}-\frac{a^2}{4}$$

ಹಿಂದಿನ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಹೊಂದಿಸಿದಾಗ :

$$\frac{\cos(\measuredangle BAD)}{\cos(\measuredangle CAD)}=\frac{3\,c^2+b^2-a^2}{3\,b^2+c^2-a^2}\cdot\frac{b}{c}$$

ಆದ್ದರಿಂದ : B , C , K , L ಬಿಂದುಗಳು ಚಕ್ರೀಯವಾಗಿವೆ ⟸⟹ $\frac{c}{b}=\frac{3\,c^2+b^2-a^2}{3\,b^2+c^2-a^2}\cdot\frac{b}{c}$

ಅಂದರೆ : B , C , K , L ಬಿಂದುಗಳು ಚಕ್ರೀಯವಾಗಿವೆ ⟸⟹ $c^2(3b^2+c^2-a^2) = b^2(3c^2+b^2-a^2)$.

$c^2\,(3b^2 + c^2 - a^2\,) - b^2\,(3c^2 + b^2 - a^2\,) = a^2\,(b^2 - c^2\,) - (b^4 - c^4)$

$= (a^2 - b^2 - c^2\,)\,(b^2 - c^2)$.

B , C , K , L ಬಿಂದುಗಳು ಚಕ್ರೀಯವಾಗಿವೆ ⟸⟹ $(a^2 - b^2 - c^2)\,(\,b^2 - c^2) = 0$

$b^2 - c^2 \neq 0$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ (ನಾವು ತ್ರಿಭುಜವು ಅಸಮಬಾಹುವೆಂದು ಮೊದಲೇ ಹೇಳಿದ್ದೇವೆ), ಅಂತಿಮವಾಗಿ

B , C , K , L ಬಿಂದುಗಳು ಚಕ್ರೀಯವಾಗಿವೆ $\Longleftrightarrow a^2 - b^2 - c^2 = 0 \Longleftrightarrow \measuredangle BAC = 90^0$.

ವಿರುದ್ಧ ಆಲೋಚನೆಗಾಗಿ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಪುರಾವೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಸವಾಲನ್ನು ನೀವು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

ಸಮುದಾಯ ಗಣಿತ ಕೇಂದ್ರ (ಕಮ್ಯೂನಿಟಿ ಮ್ಯಾತಮೆಟಿಕ್ಸ್ ಸೆಂಟರ್)(CoMaC) ರಿಷಿ ವ್ಯಾಲಿ ಎಜುಕೇಷನ್ ಸೆಂಟರ್ ಮತ್ತು ಸಹ್ಯಾದ್ರಿ ಶಾಲೆ (ಕೆಎಫ್ಐ)ನ ಒಂದು ಹೊರಭಾಗವಾಗಿದೆ (ಎಪಿ). ಇದು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಬೋಧನೆಗೆ ಕಾರ್ಯಾಗಾರಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ರಾಜ್ಯ ಸರ್ಕಾರಗಳು ಮತ್ತು ಸರ್ಕಾರೇತರ ಸಂಸ್ಥೆಗಳಿಗೆ ಬೋಧನಾ ಸಾಮಗ್ರಿಗಳ ಸಿದ್ಧತೆಗಳನ್ನು ಕೈಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ . ಕೋಮಾಕ್ ಅನ್ನು shailesh.shirali@gmail.com ನಲ್ಲಿ ಸಂಪರ್ಕಿಸಬಹುದು.