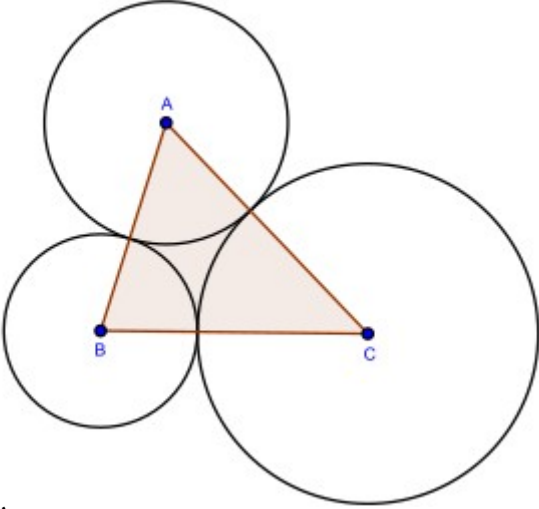


# ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಹಾಗೂ ವೃತ್ತಗಳೊಂದಿಗೆ ಒಂದು ಪರಿಶೋಧನೆ

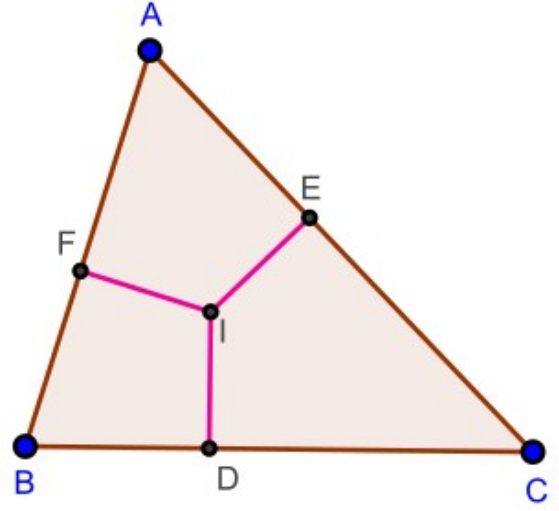
ಹಲವು ಸಾರಿ ತ್ರಿಭುಜ ಹಾಗೂ ವೃತ್ತಗಳಂತಹ ಸುಲಭ ವಿಷಯಗಳೂ ಕೂಡ ಆಸಕ್ತಿದಾಯಕ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಮೂಲವಾಗುತ್ತವೆ. ಇಂತಹ ಒಂದು ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ನಮ್ಮ ಗಣಿತ ಶಿಕ್ಷಕರು ನಾವು ಅಂತರ್ವೃತ್ತಗಳು ಹಾಗೂ ಅಂತರ್ಕೇಂದ್ರಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಕಲಿಯುವಾಗ ನೀಡಿದರು. ಅದನ್ನು ನೋಡಿದಾಗ ನನಗೆ ಅದು ಅಂತರ್ಕೇಂದ್ರಗಳ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಪರಿಹರಿಸಬಹುದಾದ ಸಮಸ್ಯೆಯೆಂದು ತಿಳಿಯಲಿಲ್ಲ. ಬದಲಾಗಿ, ನಾನು ಅದನ್ನು ಬೇರೆಯದೇ ಆದ ಇನ್ನೊಂದು ವಿಧಾನದ ಮೂಲಕ ಯೋಚಿಸಿದೆ ಹಾಗೂ ಪರಿಹರಿಸಿದೆ.

**ಸಮಸ್ಯೆ :**

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ತ್ರಿಭುಜ ABC ರಲ್ಲಿ ಮೂರು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕಿದೆ. ಈ ಮೂರು ವೃತ್ತಗಳ ಕೇಂದ್ರಬಿಂದುಗಳು ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಶೃಂಗಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಬೇಕು ಹಾಗೂ ಪ್ರತಿ ವೃತ್ತವೂ ಇನ್ನುಳಿದ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವಂತಿರಬೇಕು (I.e, ಇನ್ನುಳಿದ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯಾಗಿ), ಚಿತ್ರ ೧ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ.



ಚಿತ್ರ ೧

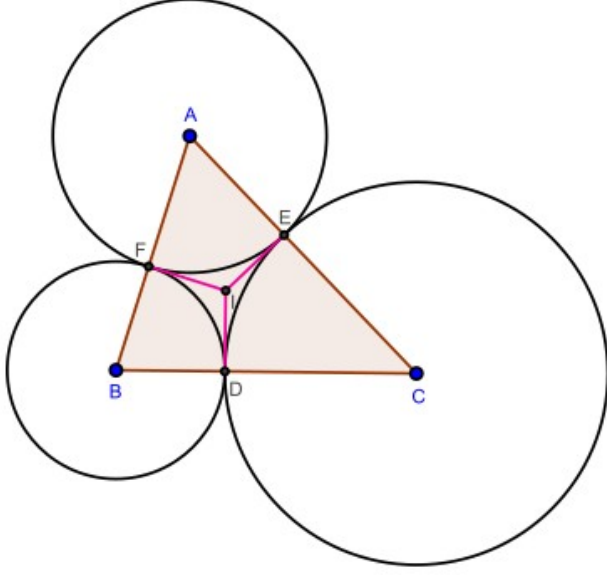


ಚಿತ್ರ ೨

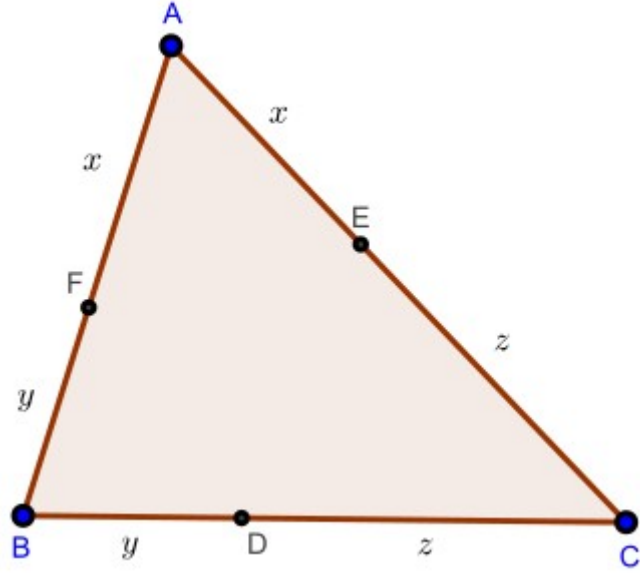
**ಪರಿಹಾರ :**

ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಹೀಗೆಯೇ ಮಾಡಬೇಕೆಂದು ನಿರೀಕ್ಷಿಸಲಾಗಿತ್ತು. ಮೊದಲು ತ್ರಿಭುಜದ ಅಂತರ್ಕೇಂದ್ರ I ಅನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ (ಈ ಬಿಂದುವು ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಕೋನಾರ್ಧಗಳು ಸೇರುವ ಬಿಂದುವಾಗಿದೆ). ನಂತರ, ಕೇಂದ್ರ I ನಿಂದ ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ID, IE ಹಾಗೂ IF ಲಂಬಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. (ಚಿತ್ರ ೨ ಅನ್ನು ನೋಡಿ; ಕೋನಾರ್ಧಗಳನ್ನು ತೋರಿಸಲಾಗಿಲ್ಲ)

ಅಂತಿಮವಾಗಿ, A ಅನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರಿಸಿ ಹಾಗೂ E ಹಾಗೂ F ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವಂತೆ, B ಅನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರಿಸಿ ಹಾಗೂ D ಹಾಗೂ F ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವಂತೆ ಮತ್ತು C ಅನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರಿಸಿ ಹಾಗೂ D ಹಾಗೂ E ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವಂತೆ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ನಮಗೆ ಬೇಕಿರುವುದು ಈ ವೃತ್ತಗಳೆ. (ಚಿತ್ರ ೨ ಅನ್ನು ನೋಡಿ)



ಚಿತ್ರ ೨



ಚಿತ್ರ ೪

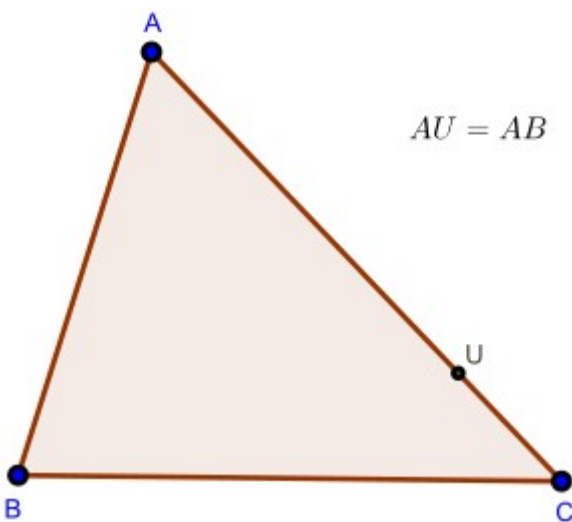
**ವಿವರಣೆ :** ಅಂತರ್ಕೇಂದ್ರವು ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಕೋನಗಳ ಮೇಲೆ ಇರುವುದರಿಂದ, ಇದು ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಬಾಹುಗಳಿಂದ ಸಮಾಂತರ ದೂರದಲ್ಲಿದೆ. ಅಂದರೆ, ID, IE ಹಾಗೂ IF ರೇಖಾಖಂಡಗಳು ಸಮನಾದ ಉದ್ದವಾಗಿವೆ (ಚಿತ್ರ ೨ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ). ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಯನ್ನು ಆಧರಿಸಿ,  $BD = BF$ ,  $AF = AE$ ,  $CE = CD$ . (IA, IB, IC ರೇಖಾಖಂಡಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ ಯಾಕೆಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ ) ಎಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು ಆದ್ದರಿಂದ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರ ೩ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ ರಚಿಸಿರಿ ಹಾಗು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

**ನನ್ನ ಪರಿಹಾರ:** ನಾನು ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಯೋಚಿಸಿರುವೆ . BC, CA, AB ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದವು ಕ್ರಮವಾಗಿ a, b, c ಆಗಿರಲಿ. A, B, C ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರವಿರುವ ವೃತ್ತಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳನ್ನು x, y, z ಆಗಿರಲಿ(ಚಿತ್ರ ೪ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ). ಸಮಸ್ಯೆಯು x, y, z ಗಳ ಅಳತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದಾಗಿದೆ.

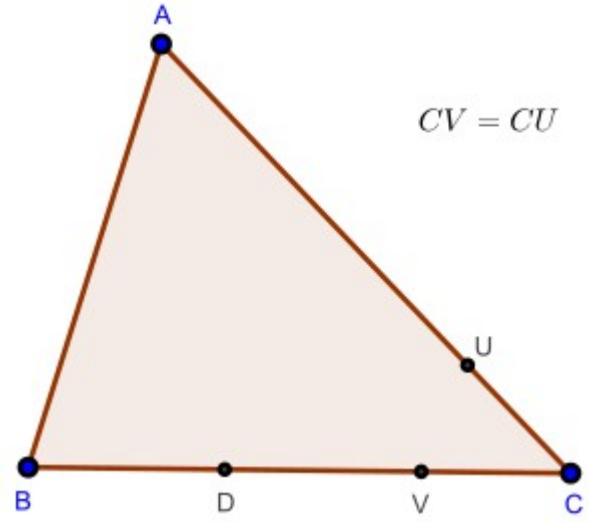
ಕೆಳಗಿನ ಚರ್ಚೆಯಲ್ಲಿ, ಬಾಹು AB ಯು ಬಾಹು AC ಗಿಂತ ಉದ್ದದಲ್ಲಿ ಕಡಿಮೆಯಿದೆಯೆಂದು ತಿಳಿಯೋಣ . ಅದರರ್ಥವು  $x+y < x+z$ , ಹಾಗು  $y < z$  ಎನ್ನಬಹುದು.

ಬಾಹು AC ಯ ಮೇಲೆ U ಎಂಬ ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತು ಮಾಡಿ ಹಾಗು  $AU=AB$  ಇದೆಯೆಂದು ಖಾತ್ರಿಪಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ (ಚಿತ್ರ ೫.೧ ನ್ನು ನೋಡಿ).  $AB < AC$  ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಇದು ಸಾಧ್ಯವಿದೆ. CU ಯ ಉದ್ದವು  $z-y$  ಇದೆ.

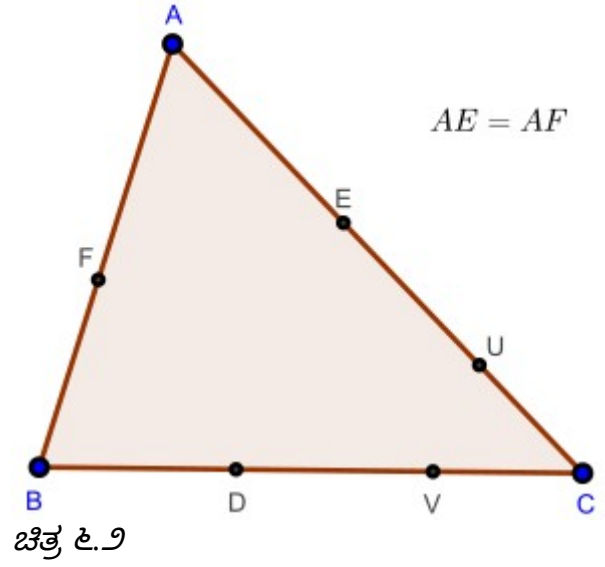
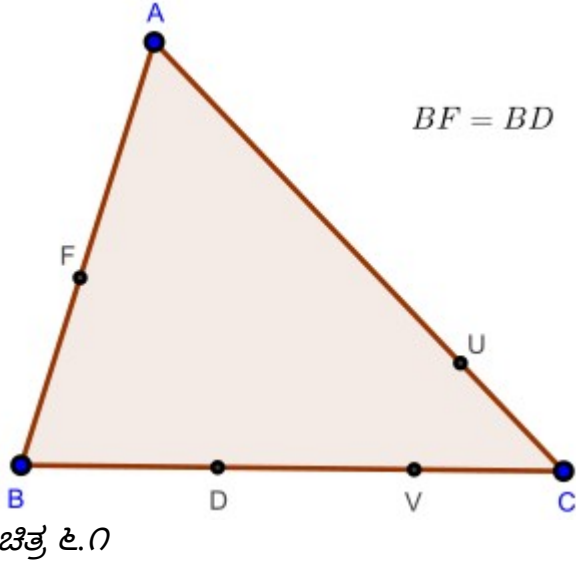
ನಂತರ ಬಾಹು BC ಮೇಲೆ ಬಿಂದು V ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ,  $CV = CU$  ಆಗಿರಬೇಕು (ಚಿತ್ರ ೫.೨ನ್ನು ನೋಡಿ) ಮತ್ತು BV ರೇಖಾಖಂಡದಲ್ಲಿ D ಎಂಬ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ. BD ಎಂಬುದು ಬೇಕಿರುವ ವೃತ್ತಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದರ ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿದೆ, B ಯ ಆ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ.



ಚಿತ್ರ ೫.೧



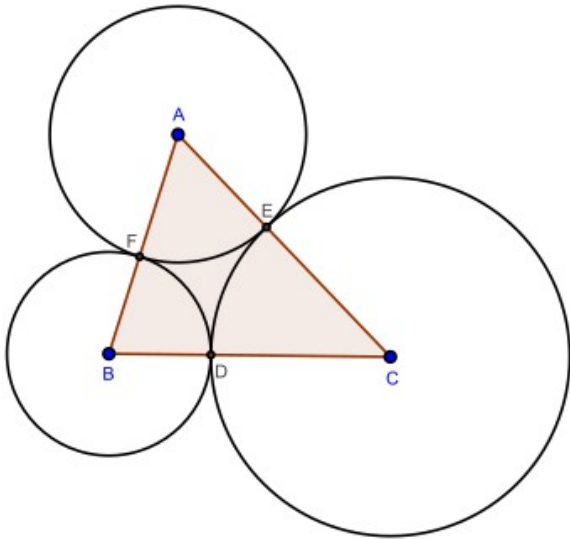
ಚಿತ್ರ ೫.೨



ಇದರಂತೆಯೇ ಬಾಹು AB ಯ ಮೇಲೆ ಬಿಂದು F ಅನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ಹಾಗೂ BD=BF ಇದೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ (ಚಿತ್ರ ೬.೧ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ), ಅದೇ ರೀತಿ ಬಿಂದು E ಅನ್ನು ಬಾಹು AC ಯ ಮೇಲೆ ಗುರುತಿಸಿ ಹಾಗೂ AE=AF ಆಗಿರಬೇಕು (ಚಿತ್ರ ೬.೨ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ) . ಈ ರಚನೆಗಳಿಂದ D,E,F ಬಿಂದುಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ, ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವಂತೆ ರಚಿಸಬಹುದಾಗಿದೆ (ಚಿತ್ರ ೭).

**ವಿವರಣೆ :** ಈ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ ಕೆಲಸಮಾಡುತ್ತದೆ ಯಾಕೆಂದರೆ, ನಿಮಗೆ ನೆನಪಿರಲಿ  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ . ಚಿತ್ರ ೫.೧, ೫.೨, ೬.೧ ಹಾಗೂ ೬.೨ ಗಳಲ್ಲಿ,  $AU = c$  ಇದೆ, ಇದರಿಂದ  $CU = b - c = CV$  ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ, ಆದ್ದರಿಂದ  $BV = a - (b - c) = a - b + c$ . ಇದರಿಂದ ಧ್ವನಿತವಾಗುವುದು  $BD = (a - b + c)/2 = s - b$ , ಇಲ್ಲಿ  $s$  ತ್ರಿಭುಜದ ಅರೆ-ಪರಿಧಿಯಾಗಿದೆ, ಇದರ ರೂಪವು  $s = (a + b + c)/2$  ಆಗಿದೆ.

$$AF = c - \frac{a - b + c}{2} = \frac{-a + b + c}{2} = s - a,$$



ಚಿತ್ರ ೭

ಆದ್ದರಿಂದ  $AE = s - a$  ಆಗುತ್ತದೆ. ಮುಂದೆ ಗಮನಿಸಬೇಕಾದದ್ದು

$$CE = b - \frac{-a + b + c}{2} = \frac{a + b - c}{2} = s - c,$$

$$\text{ಹಾಗೂ } CD = a - \frac{a-b+c}{2} = \frac{a+b-c}{2} = s-c,$$

ಇದರಿಂದ ನಮಗೆ  $CE = CD$  ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ನಮಗೆ  $BD = BF, AF = AE, CE = CD$  ಎಂದು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ B ನಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರ ಹೊಂದಿರುವ, ತ್ರಿಜ್ಯ BD ಆಗಿರುವ, F ನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುತ್ತಿರುವ ವೃತ್ತ, A ನಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರ ಹೊಂದಿರುವ, ತ್ರಿಜ್ಯ AF ಆಗಿರುವ, E ನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುತ್ತಿರುವ ವೃತ್ತ ಹಾಗೂ C ನಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರ ಹೊಂದಿರುವ, ತ್ರಿಜ್ಯ CE ಆಗಿರುವ, D ನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುತ್ತಿರುವ ವೃತ್ತ. ಈ ಮೂರು ವೃತ್ತಗಳೂ ಮೊದಲಿನ ಚಿತ್ರ ೩ರಲ್ಲಿ ಬಿಡಿಸಿದ ಮೂರು ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಸರ್ವಸಮವಾಗಿವೆ . ಆದ್ದರಿಂದ ಮೇಲೆ ವಿವರಿಸಿದಂತೆ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಬಹುದು.

**ಪಾರ್ಥಿವ್ ಡೇಡಸಾನಿಯಾ** ಈಗ ಕೊಡೈಕೆನಾಲ್ ಅಂತರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ ೧೨ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಓದುತ್ತಿದ್ದಾರೆ. ಇವರ ಆಸಕ್ತಿಗಳು ಗಣಿತದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹಾಗೂ ಒಗಟುಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದು . ಪ್ರತಿಷ್ಠಿತ ವಾಟರ್‌ಲೂ ಪರೀಕ್ಷೆಯೂ ಒಳಗೊಂಡಂತೆ ಗಣಿತದ ಒಲಂಪಿಯಾಡ್‌ಗಳಲ್ಲಿ ಇವರು ಪದಕಗಳನ್ನು ಗೆದ್ದಿದ್ದಾರೆ . ಗಣಿತದ ಕಲಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಕಷ್ಟಪಡುವ ಕಿರಿಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಸಹಾಯ ಮಾಡುವುದನ್ನು ಇವರು ಆನಂದಿಸುತ್ತಾರೆ . ಕಾಲೇಜಿನಲ್ಲಿ ರೋಬಾಟಿಕ್ಸ್ ಅಥವಾ ನ್ಯಾನೋ -ಟೆಕ್ನಾಲಜಿ ಓದುವ ಅಭಿಲಾಷೆಯಿದೆ . ಪಾರ್ಥಿವ್ ಅವರನ್ನು ನೀವು [parthiv3215@gmail.com](mailto:parthiv3215@gmail.com) ಅಲ್ಲಿ ಸಂಪರ್ಕಿಸಬಹುದಾಗಿದೆ.