ಮಾಧ್ಯಮಿಕ ಶಾಲೆಯ ಲೆಕ್ಕಗಳು (ಸಮಸ್ಯೆಗಳು)

ಇಂಗ್ಲೀಷ್ ಮೂಲ : ಶೈಲೇಶ್ ಶಿರಾಲಿ

ಅನುವಾದ : ಡಾ. ವನಜಾ ವಿ
ಸಹಾಯಕ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರು ಗಣಿತ ವಿಭಾಗ,
ಸರ್ಕಾರಿ ಪ್ರಥಮ ದರ್ಜೆ ಕಾಲೇಜು
ಯಲಹಂಕ, ಬೆಂಗಳೂರು-560064

ಇಂದಿನ ಆವೃತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಪವರ್ತನ ಮತ್ತು ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯುತ್ತಾ , ತಾಳೆ ನೋಡುತ್ತಾ ,ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಆಟವನ್ನು ಆಡೋಣ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ತಿಳಿದು ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಂಡು ಕೊಟ್ಟ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆ ಮತ್ತು ಭಾಜ್ಯತೆಯ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಕಲಿಯೋಣ . ಇದರಿಂದ ನೀವು ಸಂತಸದಿಂದ ಕಲಿಯುವಿರಿ ಹಾಗು ನಿಮ್ಮ ಅರ್ಥೈಸುವ ಗುಣ ವೃದ್ಧಿಸುವುದು.

ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದೊಂದಿಗೆ ಅವುಗಳ ಅಪವರ್ತನ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ವಿಧಾನ. **N** ಎಂಬುದು ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಲಿ, ಇದರ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಬರೆಯುವ ರೀತಿಯು ಕೆಳಕಂಡಂತಿದೆ.

$\mathbf{N} = p_1^{b1} \times p_2^{b2} \times p_3^{b3} \times \ldots\ldots\ \times p_k^{bk}$ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯು $(b_1 + 1)(b_2 + 1)(b_3 + 1)\ldots\ldots(b_k + 1)$ ಎಂಬ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ 75 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯಅವಿಭಾಜ್ಯ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಈ ರೀತಿ ಇದೆ. $75 = 3^1 \times 5^2$ ಇಲ್ಲಿ 3 ಮತ್ತು 5 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿವೆ. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘಾತಗಳು 1 ಮತ್ತು 2 ಆಗಿರುವುದರಿಂದ 75 ಸಂಖ್ಯೆಯು $(1 + 1)(2 + 1) = 6$ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಅವು ಯಾವುವೆಂದರೆ 1, 3, 5, 15, 25, 75.

(ಸಂಖ್ಯೆ 75 ಇಲ್ಲಿ ತಿಳಿಸಲಾದ 6 ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುತ್ತವೆ).

ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಪವರ್ತನ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಕೊಟ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನಾಗಿ ಬರೆದು ಅವುಗಳ ಘಾತಗಳಿಗೆ 1 ನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ ಬರುವ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಒಟ್ಟು ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಮೇಲೆ ತಿಳಿಸಿದ 75 ನ್ನು 3^1 ಮತ್ತು 5^2 ರ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು. 3 ರ ಘಾತ ಸಂಖ್ಯೆ 1 ಮತ್ತು 5 ರ ಘಾತ ಸಂಖ್ಯೆ 2 ಆಗಿದ್ದು ಇವುಗಳಿಗೆ ತಲಾ 1 ನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ 2 ಮತ್ತು 3 ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. ಈ 2 ಮತ್ತು 3 ರ ಗುಣಲಬ್ಧ 6 ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ 75 ರ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 6 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಇಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ನಂತರ ಬಿಡಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಲೆಕ್ಕ VI-2-M.I http://nrich.maths.org/4989

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯು ನಿಖರವಾಗಿ 8 ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದು ಅದರಲ್ಲಿ 1 ಮತ್ತು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೂ ಒಳಗೊಂಡಿದೆ. ಇದರ ಎರಡು ಅಪವರ್ತನಗಳು 21 ಮತ್ತು 35 ಆಗಿವೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು ?

ಲೆಕ್ಕ VI – 2 – M.2 From http://nrich.maths.org/480

14 ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಹೇಗೆ ಪಡೆಯಬಹುದು ? ಅಂತಹ ಅತಿ ಚಿಕ್ಕ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಹೇಗೆ ಪಡೆಯಬಹುದು ?

18 ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಹೇಗೆ ಪಡೆಯುವುದು ? ಅಂತಹ ಅತಿ ಚಿಕ್ಕ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಹೇಗೆ ಪಡೆಯಬಹುದು ?

ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ ?

ವಿಸ್ತರಣೆ : 100 ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅಪವರ್ತನಗಳುಳ್ಳ ಅತಿ ಚಿಕ್ಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು ? 1000 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇರುವ ಅತಿ ಹೆಚ್ಚಿನ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು ?

ಲೆಕ್ಕ : VI- 2.M.3 From http://nrich.maths.org/524.

ಯಾವುದಾದರೂ 3 ಅಂಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 6 ಅಂಕೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಲು, ಮೊದಲು ತೆಗೆದುಕೊಂಡ 3 ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಅದೇ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಪುನಾರಾವರ್ತಿಸಿ . (ಉದಾ: 594594) ಇಂತಹ ಯಾವುದಾದರೂ ಸಂಖ್ಯೆಯು 7, 11, ಮತ್ತು 13 ರಿಂದ ಭಾಜ್ಯತೆಗೊಳಪಡಿಸಬೇಕು ಮತ್ತು ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಏನು ಮಾಡಬೇಕು ತಿಳಿಸುವಿರಾ?

ಲೆಕ್ಕ : VI – 2.M.4

ಶೈಲೇಶ್ ಶಿರಾಲಿ ರವರ ' ಅಡ್ವೆಂಚರ್ಸ್ ಇನ್ ಪ್ರಾಬ್ಲಮ್ ಸಾಲ್ವಿಂಗ್ ' ಎಂಬ ಪುಸ್ತಕದಿಂದ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿಕೊಂಡ ಲೆಕ್ಕವಿದು. ಈ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು 'ಮಸಕು ದಾಖಲೆ'ಯ ಲೆಕ್ಕ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಈ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಮಸಕು ಮಾಡಿರುತ್ತಾರೆ ಮತ್ತು ಓದಲಾಗದ ಅಂಕಿಗಳನ್ನು x ಎಂಬ ಅಕ್ಷರದಿಂದ ನಮೂದಿಸಿರುತ್ತಾರೆ.

X ಎಂಬುದನ್ನು ಸರಳೀಕರಿಸಿ ನಿಜವಾದ ಅಂಕೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವ ವಿಧಾನ.

ಉದಾ : 8 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮಾತ್ರ ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಮಾಡಿರುವ ಒಂದು ಭಾಗಾಕಾರದ ಲೆಕ್ಕ.

```
                XX    8    X    X
  X    X   X X X    X    X    X    X
          ----------------------------
 -------   X X X         X    X
                         X    X    X
          -------    -------
                          X    X    X

                         -----------0

                         -----------
```

ಪರಿಹಾರಗಳು :

ಲೆಕ್ಕ VI-2-M.I http://nrich.maths.org/4989

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯು ನಿಖರವಾಗಿ 8 ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದು ಅದರಲ್ಲಿ 1 ಮತ್ತು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೂ ಒಳಗೊಂಡಿದೆ. ಇದರ ಎರಡು ಅಪವರ್ತನಗಳು 21 ಮತ್ತು 35 ಆಗಿವೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು ?

ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅಪವರ್ತನ ನಿಯಮವನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡಾಗ N ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು ಹೀಗಿವೆ

$$N = p_1^{b1} \text{ X } p_2^{b2} \text{ X } \ldots\ldots\ldots \text{ X } p_k^{bk}$$

ಇದರ ಅಪವರ್ತನಗಳು $= (b_1 + 1)\,(b_2 + 1)\,(b_3 + 1)\,(b_k + 1)$ ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯು 8 ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ.

$$\therefore\ (b_1 + 1)\,(b_2 + 1)\,(b_3 + 1)\ldots\ldots\ldots(b_k + 1) = 8 = 1 \times 8 = 2 \times 2 \times 2 = 4 \times 2$$

ಇಲ್ಲಿ N ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯು 3 ವಿಭಿನ್ನ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಆದರೆ 21 ಮತ್ತು 35 ಸಹ ಈ N ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿವೆ ಮತ್ತು 21 = 3 X 7 ಮತ್ತು 35 = 5 X 7 ಎಂಬುದಾಗಿ ಬರೆಯ ಬಹುದು. 3,5 ಮತ್ತು 7 ಸಹ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು.

ಆದರೆ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು 2 X 2 X 2 ಆಗಿದೆ.

(ಇದರ ಪ್ರಕಾರ N ಎಂಬುದು ನಿಖರವಾಗಿ 3 ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಹೊಂದಿದೆ)

$$\therefore\ (b_1 + 1)\,(b_2 + 1)\,(b_3 + 1) = 2 \text{ X } 2 \text{ X } 2 \Rightarrow b_1 = b_2 = b_3 = 1$$

ಆದ್ದರಿಂದ $N = 3^1 \text{ X } 5^1 \text{ X } 7^1 = 105$

ಶಿಕ್ಷಕರ ಗಮನಕ್ಕೆ **:**

ಮೇಲೆ ತಿಳಿಸಿದ ಲೆಕ್ಕವು ಒಬ್ಬ ಅನುಭವವಿಲ್ಲದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗೆ ಪ್ರೋತ್ಸಾಹ ನೀಡಲು ಬಹಳ ಸೂಕ್ತವಾಗಿದೆ . ಅನೇಕ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸೂಕ್ಷ್ಮವಾಗಿ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ಪ್ರಾವೀಣ್ಯತೆಯನ್ನು ಕಲಿಯುವ ಕಲೆಯನ್ನು ಉತ್ತೇಜಿಸುತ್ತದೆ . ಇಲ್ಲಿ ಗಮನಿಸಬೇಕಾದ ವಿಷಯವೆಂದರೆ 8 = 1 X 8 = 4 X 2 ಎಂಬ ಆಯ್ಕೆಗಳು ಸಹ ಇದ್ದವು. ಆದರೆ ತಾರ್ಕಿಕವಾಗಿ ಯಾವುದು ಹೆಚ್ಚು ನಿಖರತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ . 8 = 1 X 2 X 2 X 2 ಎಂಬ ಆಯ್ಕೆಯನ್ನೂ ಬಿಟ್ಟಿದ್ದೇವೆ. ಏಕೆ ಈ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿಕೊಂಡಿಲ್ಲ? ಎಂಬುದರ ಸ್ಪಷ್ಟತೆ ಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಈ ರೀತಿಯ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ ಮೂಡಿಸಿದಾಗ ಗಣಿತದ ಆಸಕ್ತಿ ಮತ್ತು ಪ್ರಯೋಜನದ ನಿಜವಾದ ಅರಿವು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ ಮೂಡುವುದರಲ್ಲಿ ಆಶ್ಚರ್ಯವಿಲ್ಲ!

ಲೆಕ್ಕ VI – 2-M.2 From http:// nrich.maths.org/480

ಅ) ನಿಖರವಾಗಿ 14 ಅಪವರ್ತನಗಳಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಹೇಗೆ ಪಡೆಯಬಹುದು ? ಅಂತಹ ಅತಿ ಚಿಕ್ಕ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ರೀತಿ ಹೇಗೆ ?

ಆ) ನಿಖರವಾಗಿ 18 ಅಪವರ್ತನಗಳಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಹೇಗೆ ಪಡೆಯಬಹುದು ? ಅಂತಹ ಅತಿ ಚಿಕ್ಕ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ರೀತಿ ಹೇಗೆ ?

ಇ) ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ?

ಈ) ನಿಖರವಾಗಿ 100 ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಅತಿ ಚಿಕ್ಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು ?

ಉ) 1000 ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾಗಿರುವ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಅತಿ ಹೆಚ್ಚು ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ?

ಅ) ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯು 14 ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ,

ಅದು $(b_1 +1)(b_2 +1)(b_3 + 1) \ldots (b_k + 1) = 14 = 1 X 14 = 2 X 7$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಇಲ್ಲಿ $b_1 = 13$ ಅಥವಾ $b_1 =1$ ಮತ್ತು $b_2 = 6$

ಆದರೆ ಈ ಕ್ರಿಯೆಯು ಅನಂತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಆಯ್ಕೆಗಳನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ. ಕಾರಣವೇನೆಂದರೆ $2^{13} = 8192$ ಅಥವಾ $3^1 X 5^6 = 46875$, $3^6 X 5^1 = 3645$: ಹೀಗೆ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಇದ್ದಾಗ ನಮಗೆ ಅನೇಕ ಅಥವಾ ಅನಂತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಿಗುತ್ತವೆ. ಇದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ ಅನೇಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 14 ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ. ಇದರಲ್ಲಿ ಅತಿ ಚಿಕ್ಕ ಸಂಖ್ಯೆಯು 192 ಆಗಿದೆ. ಕಾರಣ $192 = 2^6 X 3^1$ ಎಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆದಾಗ ಈ 192 ಸಂಖ್ಯೆಯು 14 ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಅವು ಯಾವುವೆಂದರೆ 1,2,4,8,16,32,64,3,6,12,24,48,96,ಮತ್ತು 192.

ಆ) ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯು 18 ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ,

ಅದು $(b_1 +1)(b_2 +1)(b_3 + 1) \ldots (b_k + 1) = 18 = 1 X 8 = 3 X 6 = 2 X 9 = 2 X 3 X 3$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಇಲ್ಲಿ $b_1 = 17$ ಅಥವಾ $b_1 =2$ ಮತ್ತು $b_2 =5$ ಅಥವಾ $b_1 = 1$ ಮತ್ತು $b_2 = 8$ ಅಥವಾ $b_1 = 1$ ಮತ್ತು $b_2 = 2$ ಮತ್ತು $b3 = 2$ ಆಗಿರಬೇಕು. ಈ ಆಯ್ಕೆಗಳು ಅನೇಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ನೀಡುತ್ತವೆ. ಕಾರಣ, $3^{17} = 129140163$ ಅಥವಾ $3^8 X 5^1 = 32805$ ಅಥವಾ $2^2 X 5^2 = 12500$ ....

ಇದರಲ್ಲಿ ಮೂಡುವ ಚಿಕ್ಕ ಸಂಖ್ಯೆಯು $180 = 2^2 X 3^2 X 5^1$.

ಇ) ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ,

ಅದು $(b_1 +1)(b_2 +1)(b_3 + 1) \ldots (b_k + 1)$ ಎಂಬ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಆದರೆ $b_1, b_2, b_3 \ldots b_k$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮಾತ್ರ ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಮತ್ತು $N = p_1^{b1} X p_2^{b2} X \ldots\ldots X p_k^{bk}$ ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಈ ರೀತಿಯ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಅನೇಕ ಗಣಿತದ ಒಗಟುಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದರಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಕ್ಕೆ ಬರುತ್ತದೆ.

ಹೆಚ್ಚಿನ ಮಾಹಿತಿಗೆ http : // teachersofindia.org/en/article/atria-dumble-door-rescue

ಈ) 100 = 2 X 2 X 5 X 5

ಆದ್ದರಿಂದ $2^4 X 3^4 X 5 X 7$ ಎಂಬುದು ಅತಿ ಚಿಕ್ಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದು 100 ರ ಭಾಜಕಗಳಿವೆವೆ.

ಉ) ಕೊನೆಯ ಪ್ರಶ್ನೆಯು ಅದ್ಭುತವಾಗಿದ್ದು ಸವಾಲಿನ ರೀತಿಯಲ್ಲಿದೆ. ಹಿಂದಿನ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಜ್ಞಾನದಿಂದ ಇದರ ಉತ್ತರವನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದಾಗಿದೆ. 210 = 2 X 3 X 5 X 7 (ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯು 1000 ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾಗಿದೆ) ಮತ್ತು 210 X 11 ಎಂಬುದು 1000 ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ 1000 ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ 2, 3, 5 ಮತ್ತು 7 ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

ನಿರಂತರ ಪ್ರಯತ್ನದಿಂದ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘಾತಗಳನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸಿ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ನೋಡುತ್ತಾ 1000 ವನ್ನು ದಾಟದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸತತ ಪ್ರಯತ್ನಗಳಿಂದ ಮಾಡಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 3 X 5X 7 X 8 ಇವು 1000 ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾಗಿದ್ದು 64 ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಬಹುಶಃ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಅತಿ ಹೆಚ್ಚು ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

ಶಿಕ್ಷಕರ ಗಮನಕ್ಕೆ**:**

ಇಲ್ಲಿ ನೀಡಿರುವ ಲೆಕ್ಕಗಳು ಬಹುಶಃ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಸ್ವಲ್ಪ ಕಷ್ಟವಾಗಿ ಕಾಣುತ್ತದೆ ಆದರೆ ತರ್ಕ ಬದ್ಧವಾಗಿ ಕಾರಣೀಕರಿಸಿದಾಗ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ವಿಭಿನ್ನ ರೀತಿಯ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ನೀಡುತ್ತಾ ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತಾನೆ. ಇದು ಒಂದು ಒಳ್ಳೆಯ ಬೆಳವಣಿಗೆಯಾಗಿದೆ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಅನೇಕ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಂಡು ಅವುಗಳ ಬಳಕೆಯನ್ನು ಮಾಡಿದಾಗ ಅವನ ಪ್ರಭುದ್ದತೆ ಹೆಚ್ಚುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಬಳಸಲಾದ ವಿಧಾನವು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯಲ್ಲಿ ಶ್ರದ್ಧೆ, ಬದ್ಧತೆ ಮತ್ತು ಯಾವುದೇ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಕೊಟ್ಟರೂ ಸಹ ಅದನ್ನು ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಳ್ಳುವ ಕ್ರಿಯೆ ಮತ್ತು ನಿಖರವಾದ ಉತ್ತರವನ್ನು ಕೊಡುವಲ್ಲಿ ಯಶಸ್ವಿಯಾಗುತ್ತಾನೆ.

ಲೆಕ್ಕ VI – 2 M . 3 From http://nrich.maths.org/524

ಯಾವುದಾದರೂ 3 ಅಂಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 6 ಅಂಕೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಲು ಮೊದಲು ತೆಗೆದುಕೊಂಡ 3 ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಪುನಾರಾವರ್ತಿಸಿ. (ಉದಾ: 523523) ಇಂತಹ ಯಾವುದಾದರೂ ಸಂಖ್ಯೆಯು 7, 11, ಮತ್ತು 13 ರಿಂದ ಭಾಜ್ಯತೆಗೊಳಪಡಿಸಬೇಕು ಮತ್ತು ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಏನು ಮಾಡಬೇಕು ತಿಳಿಸುವಿರಾ?

ಈ ಲೆಕ್ಕವು ಬಹಳ ಸುಂದರ ಮತ್ತು ಸರಳವಾಗಿದೆ. ಇದರ ಉತ್ತರವನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಸ್ಥಾನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಉಗಮವಾದ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು 1001 ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಇದನ್ನು 3 ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅವು ಯಾವುವೆಂದರೆ 7 X 11 X 13.

ಉದಾ : $523523 = 5 X 10^5 + 2 X 10^4 + 3 X 10^3 + 5 X 10^2 + 2 X 10^1 + 3 X 1$

$= 5 \times 10^2 (10^3 + 1) + 2 \times 10 (10^3 + 1) + 3 (10^3 + 1)$

$= 523 (10^3 + 1)$

ಶಿಕ್ಷಕರ ಗಮನಕ್ಕೆ :

ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಇಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸುವುದನ್ನು ಕಲಿತು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ವಿನ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಮೂಡಿಸುವಲ್ಲಿ ಆಸಕ್ತಿಯನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಇಂತಹ ಪ್ರಯತ್ನಗಳಿಂದ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಭಾಜ್ಯತೆಯ ನಿಯಮವನ್ನು ಕರಗತ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ನಿರ್ಮಿಸಿದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವುದರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ತಾಳೆನೋಡಿ ಸಂತೋಷದಿಂದ ಗಣಿತದ ಇನ್ನಷ್ಟು ಪರಿಕರಗಳನ್ನು ನಿರ್ಮಾಣ ಮಾಡಬಹುದಾಗಿದೆ.

ಲೆಕ್ಕ VI – 2. M .4.8 ರಿಂದ ಮಾತ್ರ

```
                    c   d   8   e   f
      a   b   p   q     r   s   t   u   v
              x   x     x
                            x   x
                            x   x
                                x   x   x
                              x   x   x
                                        0
```

ಇದರಲ್ಲಿ ತಿಳಿಯಲೇಬೇಕಾದ ಅಂಶವೆಂದರೆ ab ಎಂಬುದು ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಲ್ಲದ ಸಂಖ್ಯೆ. ಇವು ಎರಡು ಅಂಕಿಗಳು a ಎಂಬುದು ಹತ್ತರ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು b ಎಂಬುದು ಒಂದರ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ಈ ಅಂಶವನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಿ ಮತ್ತು x ಎಂಬುದು ಒಂದು ಗೊತ್ತಿಲ್ಲದ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಭಾಜ್ಯತೆಯ ನಿಯಮದ ಜ್ಞಾನಾನುಸಾರ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಮಾಡಬಹುದು.

```
                    c   0   8   0   f
      a   b   p   q     r   s   t   u   v
              p   p     p
                            s  t
                            x   x
                                x   u   v
                                x   u   v
                                        0
```

ಈ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ x ಎಂಬ ಗೊತ್ತಿಲ್ಲದ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಗಣನೀಯವಾಗಿ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿದೆ. ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿರುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ st ಎಂಬುದು ಎರಡು ಅಂಕಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದು ಇದರ 8 ರ ಗುಣಲಬ್ಧವೂ ಸಹ ಎರಡು ಅಂಕಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ. ಆದರೆ st ಎಂಬುದು ಎರಡು ಅಂಕಿಗಳ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ.

ab ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಒಂದೇ ಒಂದು ಎರಡು ಅಂಕಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 8 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಬರುವ 2 ಅಂಕಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 10, 11, 12 ಎಂಬ ಮೂರು ಆಯ್ಕೆಗಳು. ಆದರೆ ab ಯನ್ನು c ಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ 3 ಅಂಕಿಗಳ ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆ pqr ಆಗಿ ಬರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ 12 ಮಾತ್ರ ab ಜಾಗದಲ್ಲಿ ಬರಲು ಸೂಕ್ತವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು c = 9 ಮತ್ತು pqr = 108 ಆಗುತ್ತದೆ.

```
            9  0  8  0  f
1  2   1  0  8  s  t  u  v
       1  0  8
             s  t
             9  6
                g  u  v
                g  u  v
                      0
```

ಗೊತ್ತಿಲ್ಲದ ಸಂಖ್ಯೆ x ಅನ್ನು ಗಣನೀಯವಾಗಿ ಕಡಿಮೆಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಮತ್ತು st ಯನ್ನು 97, 98 ಅಥವಾ 99 ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದಾಗ ಕೊಷ್ಠಕದಲ್ಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಬರುತ್ತವೆ.

st	g	gu (12 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ)	guv(12 ರ ಗುಣಕಗಳು)	pqrstuv
97	1	10	108	1089708
	1	11		
98	2	20	204	1089804
	2	21	216	1089816
	2	22	228	1089828
99	3	30	300	1089900
	3	31	312	1089912
	3	32	324	1089924
	3	33	336	1089936
	3	34	348	1089948
	3	35		

ಈ ಕೊಷ್ಟಕದಲ್ಲಿರುವ ಆಯ್ಕೆಗಳಲ್ಲಿ pqrstuv ಯನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಸೂಕ್ತವಾದ ಸಂಖ್ಯೆ ಮೊದಲನೇ ಆಯ್ಕೆಯಾಗಿದ್ದು ಇದರ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಹತ್ತನೇ ಮತ್ತು ಸಾವಿರದ ಸ್ಥಾನ ಬೆಲೆಯು ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿದೆ . ಆದ್ದರಿಂದ ನಮ್ಮ ಕೊನೆಯ ಉತ್ತರ ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ.

```
              9  0  8  0  9
   1  2   1  0  8  9  7  0  8
          1  0  8
                 9  7
                 9  6
                    1  0  8
                    1  0  8
                          0
```

ಕ್ರಮಬದ್ದವಾದ ಕಾರಣದಿಂದ ಮತ್ತು ಭಾಜ್ಯತೆಯ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಳ್ಳುವುದರಿಂದ ಈ ರೀತಿಯ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಸುಲಲಿತವಾಗಿ ಮಾಡಬಹುದು.

ಶಿಕ್ಷಕರ ಗಮನಕ್ಕೆ **:**

ಈ ರೀತಿಯ ಮಸುಕು ಲೆಕ್ಕಗಳು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ ಆಸಕ್ತಿ ಮೂಡಿಸಿ ಕಲಿಕೆಯನ್ನು ಉತ್ತೇಜಿಸಿ ತಮ್ಮದೇ ಆದ ಈ ರೀತಿಯ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಮೂಡಿಸಲು ಪ್ರೇರೇಪಿಸುತ್ತದೆ.

ಶಿಕ್ಷಣ ಶಾಸ್ತ್ರ : ಈ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಮಾಡಲು ಮತ್ತು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಬಳಸಿರುವ ತಂತ್ರಗಾರಿಕೆಯು ಕೆಳಕಂಡಂತಿದೆ.

1. ಕ್ರಮಬದ್ಧವಾದ ಪ್ರತಿಪಾದನೆ.
2. ಸಾಧ್ಯತೆಗಳ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಪಟ್ಟಿಮಾಡಿಕೊಂಡು ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದು.
3. ಪ್ರಯತ್ನಗಳಿಂದ ತಪ್ಪುಗಳನ್ನು ಕಡಿಮೆಗೊಳಿಸುವುದು.
4. ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಂಡು ಅವಶ್ಯಕತೆಯಿದ್ದಲ್ಲಿ ಸೂಕ್ತ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಳ್ಳುವುದು.
5. ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ಸರಿಯಾದ ಜಾಗದಲ್ಲಿ ಬಳಸುವುದನ್ನು ಕಲಿಯುವುದು.
6. ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಕೇಳುವುದು.