

ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಯಾವುದೇ ಧನ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅದರ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮದೊಂದಿಗೆ ಕೂಡಿ . ಉದಾಹರಣೆಗೆ 2 ರಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿದರೆ ನಮಗೆ $2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ ಎಂಬ ಮೊತ್ತ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ ; 3 ರಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿದರೆ ನಮಗೆ $3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$.

ನಮಗೆ ಈ ಮೊತ್ತವು ಭಲಪರಿಮಾಣವಾಗಿ ದೊರಕಬಹುದೇ? ಖಂಡಿತವಾಗಿಯೂ ಸಾಧ್ಯವಿದೆ, ಒಂದು ಸುಲಭ ಮಾರ್ಗ : 1 ರಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿದರೆ ನಮಗೆ $1 + \frac{1}{1} = 2$ ಎಂಬ ಮೊತ್ತ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿನ ಮೊತ್ತವು ಭಲಪರಿಮಾಣವಾಗಿದೆ. ಇದೇ ರೀತಿ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ ಭಲಪರಿಮಾಣವಾದ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಬೇರೆ ಆಯ್ಕೆಗಳಿವೆಯೇ? ಇದೇ ಮುಂದಿನ ಸಮಸ್ಯೆಯಾಗಿದೆ.

ಸಮಸ್ಯೆ :

ಮುಂದೆ ಓದುವ ಮುಂಚೆ ಉತ್ತರವನ್ನು ಊಹಿಸಿ !

ನಾವು ಎರಡು ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ನೀಡುತ್ತೇವೆ. ಧನ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಕೆಲವು ಗುಣಗಳನ್ನು ನಾವು ಲಘುವಾಗಿ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.

(1) p ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯೆಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ ಹಾಗೂ n ಯಾವುದೇ ಭಲಪರಿಮಾಣ ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ; ಆಗ p ಯು n^2 ಅನ್ನು ಭಾಗಿಸಿದರೆ, p ಯು n ಅನ್ನು ಭಾಗಿಸೋಣ. ಇದನ್ನೇ ಇನ್ನೊಂದು ವಿಧದಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ : p ಯು n ಅನ್ನು ಭಾಗಿಸಲಾರದಿದ್ದರೆ, p ಯು n^2 ಅನ್ನು ಭಾಗಿಸುವುದಿಲ್ಲ.

(2) ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗವು ಭಲಪರಿಣಾಮವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆ ಭಲಪರಿಣಾಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, x ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದು x^2 ಭಲಪರಿಣಾಮವಾಗಿದ್ದರೆ, x ಕೂಡ ಭಲಪರಿಣಾಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನೇ ಇನ್ನೊಂದು ವಿಧದಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ : n ಒಂದು ಭಲಪರಿಮಾಣ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗವಾಗಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, \sqrt{n} ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲ.

ಉತ್ತರ 0: x ಧನ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯೆಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ ಹಾಗೂ $x + \frac{1}{x} = n$ ಭಲಪರಿಮಾಣ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ನಮ್ಮ ವಾದ ಹೀಗಿದೆ.

- $x + \frac{1}{x} \geq 2$ ಎಲ್ಲಾ $x > 0$ ಮೌಲ್ಯಗಳಿಗೆ ಇರುವುದರಿಂದ, ನಮಗೆ $n \geq 2$ ಎಂದು ದೊರಕುತ್ತದೆ.
- $x + \frac{1}{x} = n$ ಇಂದ ನಮಗೆ ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ:

$$x^2 - nx + 1 = 0 .$$

ಇದನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದಾಗ ನಮಗೆ ಇದು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ :

$$x = \frac{n \pm \sqrt{n^2 - 4}}{2}$$

$n=2$ ಇದ್ದರೆ, ವರ್ಗಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಇಲ್ಲವಾಗುತ್ತದೆ ಹಾಗೂ ನಮಗೆ $x=1$ ಎಂಬ ಉತ್ತರ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಇದು ನಮಗೆ ಈಗಾಗಲೇ ತಿಳಿದಿರುವಂತೆ $1 + \frac{1}{1}$ ಛಲಪರಿಮಾಣವಾಗಿದೆ.

- $n \geq 3$ ಇದ್ದರೆ, ಆಗ $2n - 1 \geq 5$, ಆದ್ದರಿಂದ $n^2 - (n - 1)^2 \geq 5$, ಇದರಿಂದ

$$(n - 1)^2 < n^2 - 4 < n^2.$$

ಆದ್ದರಿಂದ $n^2 - 4$ ಎರೆಡು ಸಾಲು ಪರಿಪೂರ್ಣ ವರ್ಗಗಳ ನಡುವೆ ಇರುತ್ತದೆ ಹಾಗೂ ಪರಿಪೂರ್ಣ ವರ್ಗಗಳಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಇದರಿಂದ $\sqrt{n^2 - 4}$ ಛಲಪರಿಮಾಣವಲ್ಲ ಎಂಬುದು ಸಾಬೀತಾಗುತ್ತದೆ . ಆದ್ದರಿಂದ $\sqrt{n^2 - 4}$ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ.

- ಇದರಿಂದ $n \geq 3$ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ, x ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ, ಇದು ನಮಗೆ ನೀಡಿರುವ ಮಾಹಿತಿಗೆ ವಿರುದ್ಧವಾದುದು (ಅಂದರೆ x ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯೆಂಬುದು).
- x ಅಭಾಗಲಬ್ಧವಾಗಿದ್ದರೆ, $x + \frac{1}{x}$, 2 ನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಬೇರೆ ಯಾವುದೇ ಛಲಪರಿಮಾಣ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಹೊಂದುವುದಿಲ್ಲ ಎಂದು ಈ ವೈರುಧ್ಯವು ನಮಗೆ ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.
- ಇದರಿಂದ, 1 ಮಾತ್ರ ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ಧನ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಗುಣಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

ಉತ್ತರ ೨: ಇದೊಂದು ಸುಲಭ ಉತ್ತರ. $\frac{r}{s}$ ಒಂದು ಧನ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಹಾಗೂ ಇದರ ವೃತ್ತಮದ ಮೊತ್ತವು ಛಲಪರಿಮಾಣ n ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಇಲ್ಲಿ r ಮತ್ತು s ಗಳು ಧನ ಛಲಪರಿಮಾಣಗಿಂದು ನಾವು ಅಂದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ ಹಾಗೂ ಇವುಗಳಿಗೆ ಒಂದನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಬೇರೆ ಅಪವರ್ತನಗಳಿಲ್ಲ ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ (ಅವು ಕೋಪ್ರೈಮ್‌ಗಳಾಗಿರಬಹುದು, r ಮತ್ತು s ಕೊಪ್ರೀಮ್ ಎಂದು ಊಹಿಸುವಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯತೆಯ ನಷ್ಟವಿಲ್ಲ; ಈ ರೂಪದಲ್ಲಿ ನಾವು ಯಾವುದೇ ಭಾಗವನ್ನು ಬರೆಯಬಹುದು.) p ಎಂಬುದು r ನ ಪ್ರಮುಖ ಭಾಜಕವಾಗಿದೆ ಎಂದು ನಾವು ಊಹಿಸುವುದಾದರೆ, p ಎಂದಿಗೂ s ನ ಭಾಜಕವಾಗಲಾರದು. ಈಗ ನಮಗೆ

$$\frac{r}{s} + \frac{s}{r} = n,$$

$$\therefore r^2 + s^2 = nrs,$$

$$\therefore s^2 = nrs - r^2.$$

ಈಗ ನಾವು p ಯಿಂದ ವಿಭಜಿಸುವ ಮೂರನೇ ಸಮಾನತೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸುವಾಗ ವಿರೋಧವು ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ; p , r ಅನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ, ಆದ್ದರಿಂದ p , nrs ಮತ್ತು r^2 ಅನ್ನು ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ, ಆದ್ದರಿಂದ p , $nrs - r^2$ ಅನ್ನು ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ; ಆದರೆ p , s^2 ಅನ್ನು ಭಾಗಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಈ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಪರಸ್ಪರ ವಿರುದ್ಧವಾಗಿವೆ. ಅಂತಹ ಪ್ರಮುಖ ವಿಭಜಕ ಇರುವುದಿಲ್ಲ ಎಂದು ವಿರೋಧವು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಇದರ ಅರ್ಥ $r = 1$, ಇದು ಪ್ರಮುಖ ವಿಭಜಕವಿಲ್ಲದ ಏಕೈಕ ಧನಾತ್ಮಕ ಛಲಪರಿಮಾಣವಾಗಿದೆ. ಮೇಲಿನ ವಾದದಲ್ಲಿ r ಮತ್ತು s ನ

ಪಾತ್ರಗಳನ್ನು ಬದಲಿ ಮಾಡಿಕೊಂಡರೆ, ನಾವು $s = 1$ ಅನ್ನು ಪಡೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $r = s = 1$, ಮತ್ತು $\frac{r}{s} = 1$. ಆದ್ದರಿಂದ ಅಂತಹ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ 1 ಮಾತ್ರವೇ ಆಗಿದೆ.

ಮತ್ತಷ್ಟು

ಪರಿಶೋಧನೆಗಾಗಿ

ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

ಮುಖ್ಯ ಫಲಿತಾಂಶವು ಸಾಬೀತಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ನಾವು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ತೆರೆದು, ಸಂಬಂಧಿತ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಕೇಳಬೇಕು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ನಾವು ಕೇಳಬಹುದು:

ಪ್ರಶ್ನೆ ೧ : X ಭಾಗಲಬ್ಧದಿಂದ, ನಾವು ಛಲಪರಿಮಾಣ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ತಿಳಿಯಲು $x + \frac{1}{x}$ ಅನ್ನು ಪಡೆಯಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ನಾವು ಛಲಪರಿಮಾಣವನ್ನು ಹತ್ತಿರದ ಮೌಲ್ಯಕ್ಕೆ ಹೊಂದಿಸಬಹುದು? ನಾವು 3, ಅಥವಾ 4, ಅಥವಾ 5 (ಅಥವಾ ಯಾವುದೇ ಇತರ ಛಲಪರಿಮಾಣ) ಕ್ಕೆ ಎಷ್ಟು ಹತ್ತಿರ ಹೊಂದಿಸಬಹುದು? ಈ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಯಾವ ಅರ್ಥಪೂರ್ಣ ಪ್ರಶ್ನೆ ಕೇಳಬಹುದು?

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ಕೇಳಲು ಒಂದು ಸಮಂಜಸವಾದುವೆ?

ಕೆಳಗಿನ ಅಸಮಾನತೆಗೆ ಅನುಗುಣವಾದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ x ಅಸ್ತಿತ್ವದಲ್ಲಿದೆ:

$$\left| x + \frac{1}{x} - 3 \right| < 10^{-50} ?$$

ಅನ್ವೇಷಿಸಲು ಬಹುಶಃ ಹೆಚ್ಚು ಆಸಕ್ತಿದಾಯಕ ಪ್ರಶ್ನೆಯು ಕೆಳಗಿನದು.

ಪ್ರಶ್ನೆ ೨ : X ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, $x + \frac{1}{x}$ ಎನ್ನುವುದು ಒಂದು ಛಲಪರಿಮಾಣ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಊಹಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ ಎಂದು ನಾವು ಈಗಾಗಲೇ ತೋರಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಆದರೆ ಅದು ಯಾವ ರೀತಿಯ ಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನು ಊಹಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ? ಒಂದು ನಿರಂಕುಶವಾದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ $\frac{a}{b}$ ನೀಡಿದರೆ, ಈ ಸಂಖ್ಯೆ $f(x) = x + 1/x$ ಕಾರ್ಯದ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯಲ್ಲಿದೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಹೇಗೆ ಪರಿಶೀಲಿಸುತ್ತೇವೆ? ಹೇಳದೆ ತಿಳಿಯುವುದೇನೆಂದರೆ, ಶೀಘ್ರವಾಗಿ ಕಾರ್ಯಗತಗೊಳಿಸಬಹುದಾದ ಪರಿಶೀಲನೆಯನ್ನು ನಾವು ಬಯಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ಎರಡೂ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಅನ್ವೇಷಿಸಲು ನಾವು ಓದುಗರನ್ನು ಆಹ್ವಾನಿಸುತ್ತೇವೆ . ದಯವಿಟ್ಟು ನಿಮ್ಮ ಪ್ರತಿಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಕಳುಹಿಸಿ!

ಸಮುದಾಯ ಗಣಿತ ಕೇಂದ್ರ (ಕಮ್ಯೂನಿಟಿ ಮ್ಯಾತಮೆಟಿಕ್ಸ್ ಸೆಂಟರ್)(CoMaC) ರಿಷಿ ವ್ಯಾಲಿ ಎಜುಕೇಷನ್ ಸೆಂಟರ್ ಮತ್ತು ಸಹ್ಯಾದ್ರಿ ಶಾಲೆ (ಕೆಎಫ್ಐ)ನ ಒಂದು ಹೊರಭಾಗವಾಗಿದೆ (ಎಪಿ). ಇದು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಬೋಧನೆಗೆ ಕಾರ್ಯಾಗಾರಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ರಾಜ್ಯ ಸರ್ಕಾರಗಳು ಮತ್ತು ಸರ್ಕಾರೇತರ ಸಂಸ್ಥೆಗಳಿಗೆ ಬೋಧನಾ ಸಾಮಗ್ರಿಗಳ ಸಿದ್ಧತೆಗಳನ್ನು ಕೈಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ . ಕೋಮಾಕ್ ಅನ್ನು shailsh.shirali@gmail.com ನಲ್ಲಿ ಸಂಪರ್ಕಿಸಬಹುದು.